Manipuler, verbaliser, abstraire dans l'enseignement des mathématiques

Éclairages didactiques et cognitifs

Marie-Caroline Croset
marie-caroline.croset@univ-grenoble-alpes.fr
Marie-Line Gardes
marie-line.gardes@univ-lyon1.fr

Hotel Select a la Reunion | Parcours : PNF référents mathé
https://magistere.education.fr/dgesco/course/view.php?id=1556 120 % Rechercher
Mathématiques - La S... Les plus visités MANAGER/ISC backup Portail Orange : Actu, ... Size Radio - en ligne s... Université Lyon1 L'Attrape-Nombres – J... La course aux nombre... CNRS - DGDR - Achat...

PNF référents mathématiques de circonscription

SOMMAIRE

- **Accueil**
- Le plan national de formation des Référents-MC

Didactique Disciplinaire : avril-mai 2019

Culture et développement professionnel : avril-mai 2019

Didactique Disciplinaire : juillet 2019 (cachées)

Accueil

Votre progression

Présentation de votre formation

Bienvenue dans l'espace collaboratif du plan Villani-Torossian.

Ce plan de formation en mathématiques comporte 24 jours de formation sur deux ans :

- 18 jours inscrits au plan académique de formation (PAF) ;
- 6 jours inscrits au plan national de formation (PNF).

L'espace m@gistère vous permettra de suivre le volet national du plan de formation. Il sera proposé sous forme de 3 séminaires de 2 jours en métropole, ou de 2 séminaires de 3 jours en outre-mer, en avril, juillet et octobre 2019. Il se déroulera sur différents sites au travers de regroupements inter académiques.

Chaque séminaire est organisé en 3 étapes :

- Étape 1 : un "volet distant" en amont du séminaire :

SUIVI DE MES ACTIVITÉS (NOUVEAU ?)

- Vue d'ensemble des participants

DERNIÈRES ANNONCES

(Aucune brève n'a encore été publiée)

ÉVÉNEMENTS À VENIR

Aucun événement à venir

Aller au calendrier...
Nouvel événement...

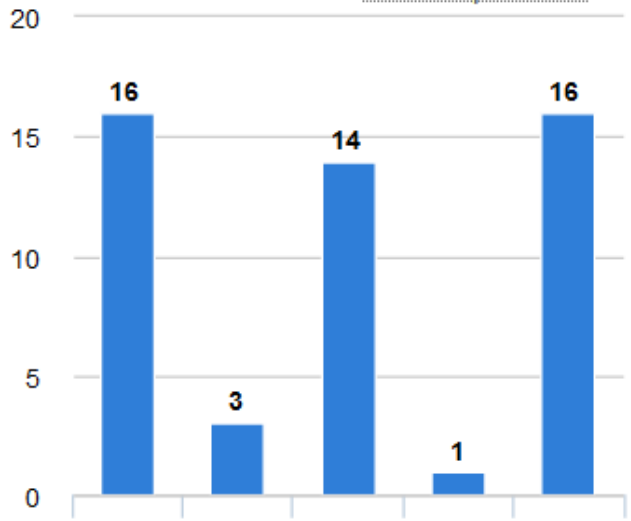
TAGS

algorithmique apprendre à apprendre

FR 20:43 25/04/2019

Selon vous, à quelle(s) occasion(s) les PE font-ils manipuler les élèves ?

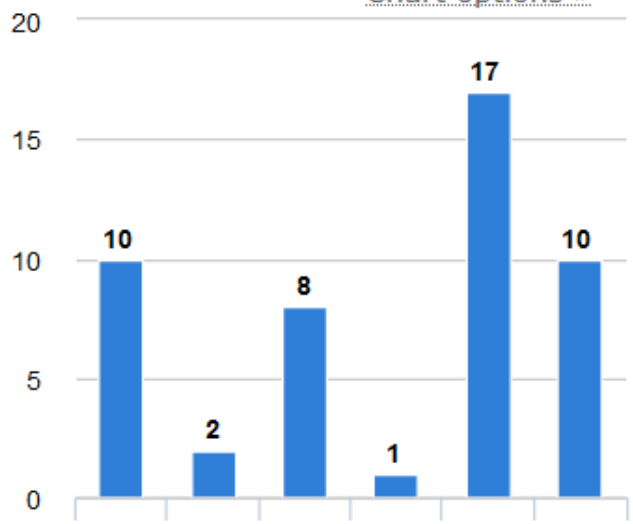
Chart options »



En début d'apprentissage d'une nouvelle notion	16
En début de séquence, même si la notion n'est pas nouvelle	3
Principalement en maternelle	14
Tout le long de l'école primaire	1
Lorsque les élèves sont en difficulté	16

Selon vous, à quelle(s) occasion(s) les PE devraient-ils faire manipuler les élèves ?

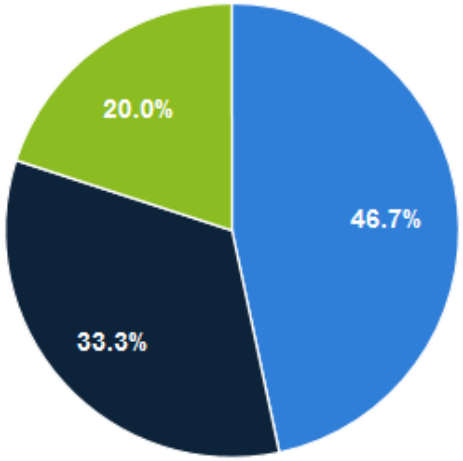
Chart options »



En début d'apprentissage d'une nouvelle notion	10
En debut de séquence, même si la notion n'est pas nouvelle	2
Tout le long d'une séquence	8
Principalement en maternelle	1
Tout le long de l'école primaire	17
Lorsque les élèves sont en difficulté	10

Est-ce que manipuler nécessite forcément du matériel ?

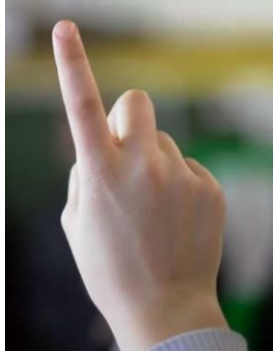
Chart options »



oui	7
non	5
autre	3

Temps 7

Situation 3. Somme d’entiers consécutifs



Déterminer le plus rapidement possible la somme des dix nombres entiers consécutifs

Série 1 : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26

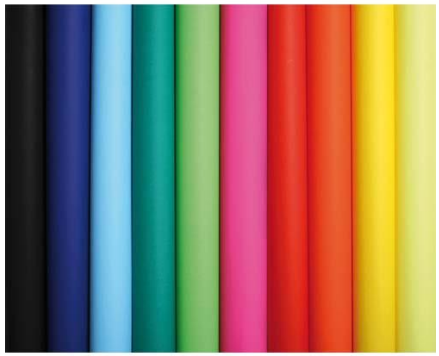
Série 2 : 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32

Série 3 : 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56

Expliquer votre procédure au groupe.
Choisir celle qui vous paraît la plus rapide.

Situation 3. Somme d’entiers consécutifs

La course entre les groupes…

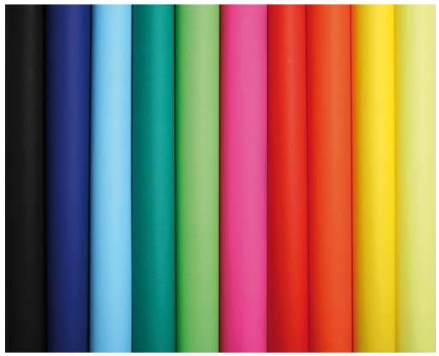


Série 4 : 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658

Situation 3. Somme d’entiers consécutifs

La course entre les groupes…

Mais attention sur huit nombres consécutifs

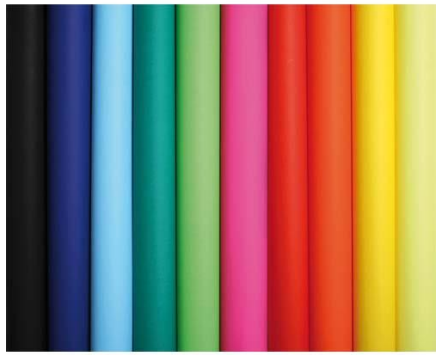


Série 5 : 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48

Situation 3. Somme d’entiers consécutifs

Répartissez-vous :

Un groupe multicolore



Expliquer vos procédures.

Objectif : A la prochaine série, votre groupe de couleur doit être premier !

Situation 3. Somme d’entiers consécutifs

Déterminer le plus rapidement possible la somme des huit nombres entiers consécutifs

Série 6 : 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32

Expliquer votre procédure.

Bilan 4. Apports mathématiques
Une suite d'entiers consécutifs

Deux aspects du nombre sont mobilisés :

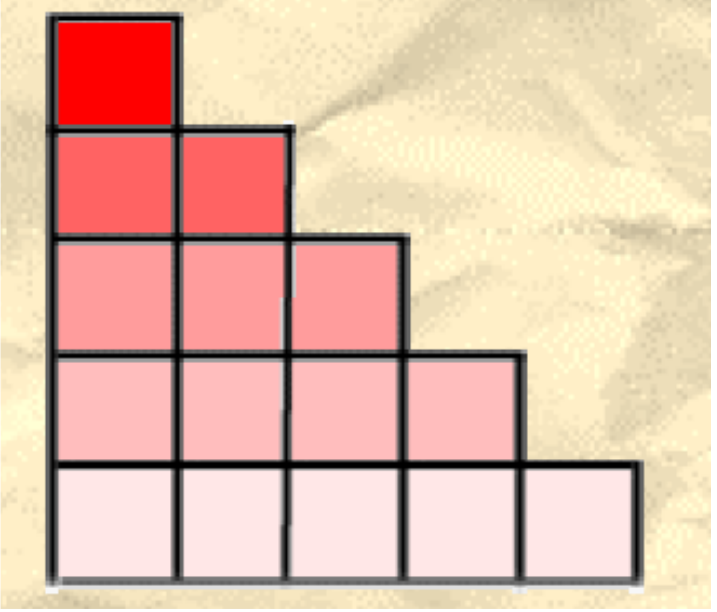
- Le système d'écriture des nombres : la numération décimale de position
- La construction des entiers via la notion de successeur, addition comme itération du successeur : notion intrinsèque

Cette situation met en lumière une distinction importante dans le travail numérique entre des résultats et des méthodes qui sont dépendantes d'un système de numération donnée (par exemple : les critères de divisibilité) et les résultats qui sont liés de manière intrinsèque aux nombres, indépendamment du système d'écriture (être divisible par 3, être un nombre premier)

(Durand Guerrier, 2010)

Bilan 4. Apports didactiques

Une suite d’entiers consécutifs



Qu’avez-vous fait pour trouver une stratégie ?

Avez-vous manipulé ?

Avez-vous expérimenté ? Formulé ? Validé ?

Bilan 4. Deuxième définition de la manipulation

Définition

On appellera manipuler la phase d'action sur des objets tangibles ou symboliques

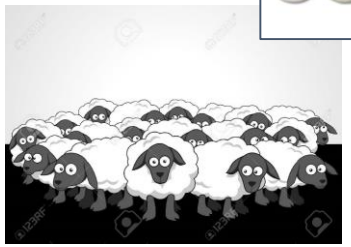
Des verbes d'action : Mettre en œuvre, déplacer, manier, toucher, palper, actionner, utiliser, opérer, calculer, etc.

Pourquoi étendre le concept ?

Bilan 4. Apports didactiques

Les mathématiques, une science expérimentale ?

- **OBJETS** : Existence d'un mode empirique de constitution des objets mathématiques



- **METHODE :** Place et rôle de l'expérimentation

  → Mise en œuvre d'une démarche de type expérimental

C'est l'articulation de l'empirique et du rationnel qui constitue la science expérimentale (Bkouche, 1982)

Bilan 4. Apports didactiques

Les mathématiques, une science expérimentale ?

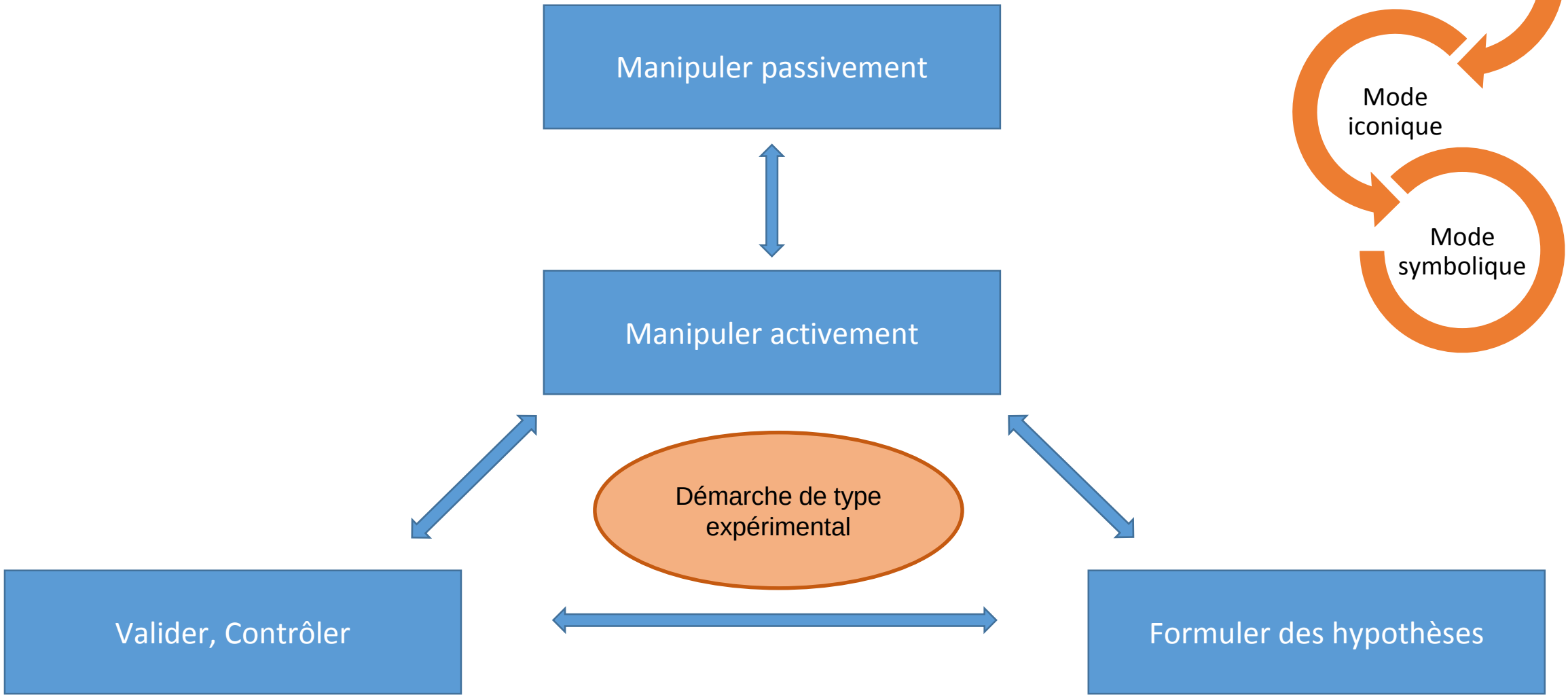
Pour résoudre des problèmes mathématiques :

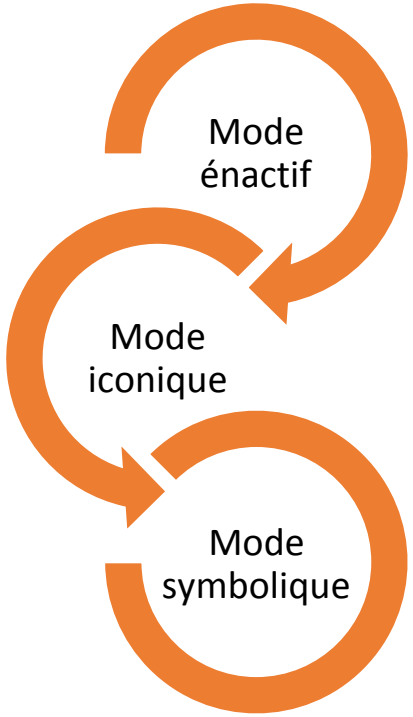
« *une méthode d'investigation systématique que je n'hésite pas à désigner sous le nom de méthode expérimentale* » (Perrin, 2007)

Cette méthode comprend plusieurs étapes à répéter éventuellement :

Expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuve, contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples, formulation de nouvelles conjectures, nouvelles tentatives de preuves, etc. (Perrin, 2007)

Bilan 4. Apports didactiques





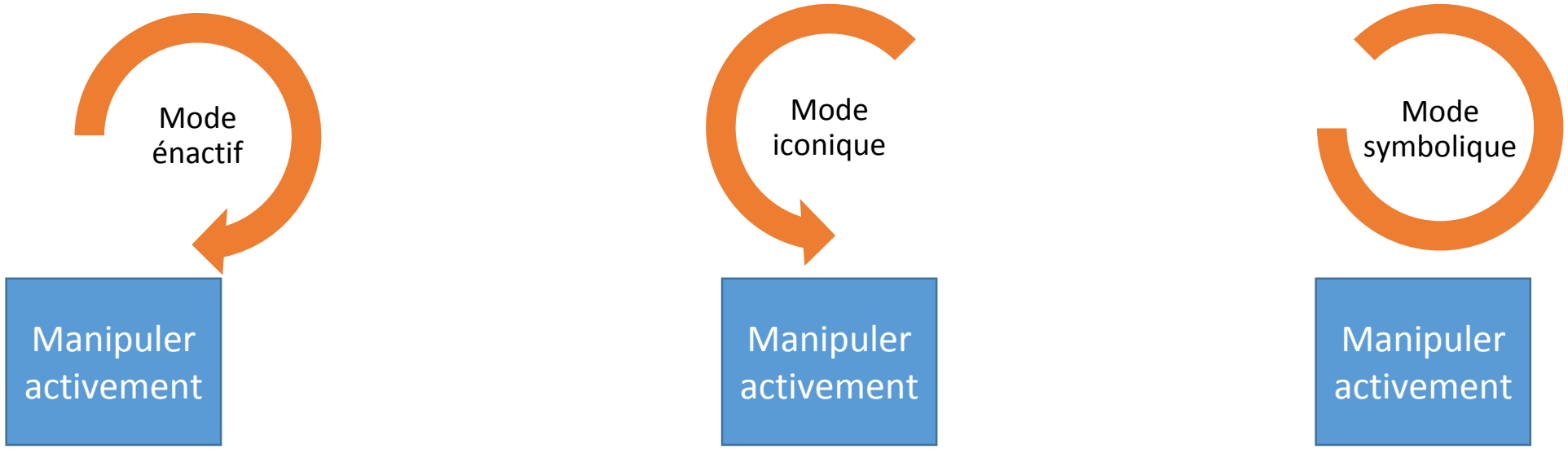
Bilan 4. Points de vigilance

On peut manipuler en mode symbolique.

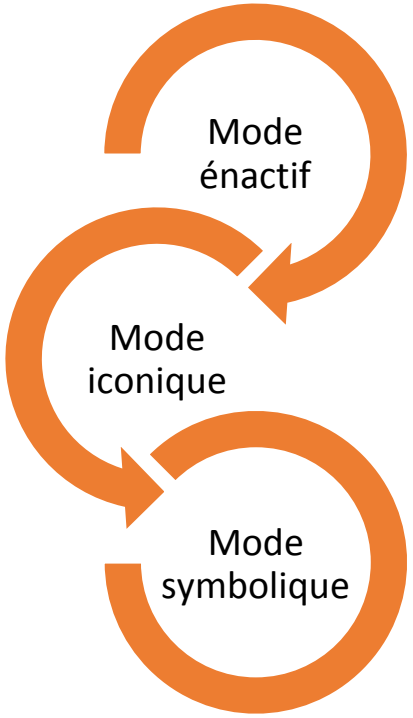
Le triptyque existe dans le mode symbolique.

Il est nécessaire de faire vivre ce triptyque dans un des modes.

Il est nécessaire de manipuler mais pas nécessairement dans le mode énactif.



Bilan 4. Points de vigilance



Le mode énactif peut être une surcharge cognitive.

The expertise reversal effect (Kalyuga et al., 2003)

Mode énactif inutile pour les experts voire délétère.

Les experts ont déjà des connaissances organisées d'une façon personnelle.

Le matériel impose une autre relation entre les connaissances.

Retour sur la situation Glouton.

Comment modifier la situation du glouton pour illustrer le tryptique en mode symbolique ?

A deux joueurs

Le but du jeu est de réussir à dire **20** en ajoutant 1 ou 2 au nombre dit par l'adversaire.

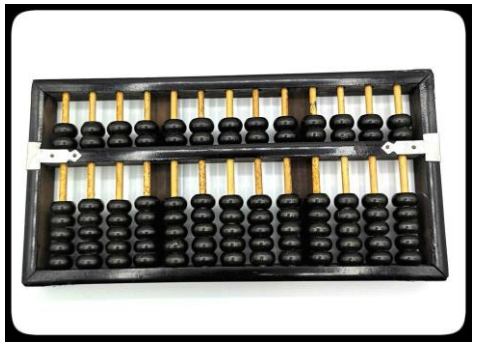
SDUNCI

Une petite pause pour noter vos « SDUNCI »

Phase	SDUNCI	Pour moi	Pour accompagner
Temps 1			
Temps 2			
Temps 3			
Temps 4	Surprenant ? Déroutant ? Utile ? Nouveau ? Connu ? Intéressant ?		
Temps 5			
Temps 6			

Temps 8
Interlude

Zoom sur mode énactif



Un type de recherche particulier : méta-analyse

Combinaison de résultats d'études indépendantes sur un problème donné, selon un protocole reproductible.

Permet une analyse plus précise des données par l'augmentation du nombre de cas étudiés et de tirer une conclusion globale

Biais de publication

Des critères sur le matériel

(Carbonneau, 2013) ; (Laski, Jor'dan, Daoust & Murray, 2015)

Des recherches sur l'effet de la manipulation via des « manipulatifs »

Manipulatifs = Matériel concret utilisé pour l'apprentissage de concepts mathématiques

Des résultats inconsistants

Manipulation bénéfique seulement dans certains contextes

Nécessité de réfléchir à comment améliorer les pratiques

Critère 1 – Temps d'utilisation d'un matériel

Méta-analyse de Sowell (1989):

- Une exposition aux mêmes manipulatifs pendant 1 an ou plus : des effets modérés
- Une exposition pour une période plus courte : pas de différence avec un enseignement sans manipulatif

Les enfants réussissent mieux à identifier la relation entre un symbole et son référentiel quand ils ont de multiples opportunités de les comparer.
(Gick&Holyoak,1983;Son,Smith&Goldstone,2011)

Les théories de l'apprentissage distribué :
répétition = meilleure compréhension de la relation entre le matériel concret et le concept abstrait (Martin, 2009)

Exemple

Critère 2 – Transparence du matériel

Plus le manipulatif est similaire physiquement au concept qu'il représente, plus les enfants seront capables de comprendre la relation entre eux.

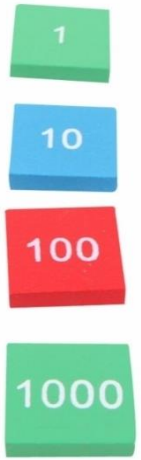
Progresser vers l'utilisation de représentations de plus en plus abstraites.

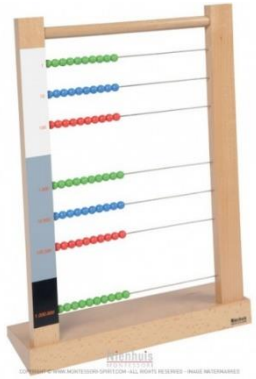
Exemple

Les jeux de plateaux et la représentation de la ligne mentale chez les enfants en maternelle

Nombre placés en ligne > nombres placés en cercle *(Siegler et Ramani, 2009)*

Exemple





Critère 3 – Nature du matériel

Les manipulatifs qui représentent des objets réels pourraient empêcher l'apprentissage.

Exemple

Théorie de la représentation duelle

Les manipulatifs qui donnent envie de jouer avec pourraient distraire et empêcher l'enfant de faire des liens entre l'objet et le concept mathématique qu'il représente.

Les manipulatifs basiques pourraient aider l'enfant à diriger son attention vers la réflexion du lien entre objet et concept.

Exemple

Les enfants qui utilisaient des billets de banques réalistes pour résoudre des problèmes faisaient plus d'erreurs que ceux qui utilisaient des représentations plus basiques de l'argent avec des morceaux de papiers blancs où seuls les nombres étaient écrits dessus

(McNeil, Uttal, Jarvin & Sternberg, 2009)

Critère 4 – Explicitation du concept

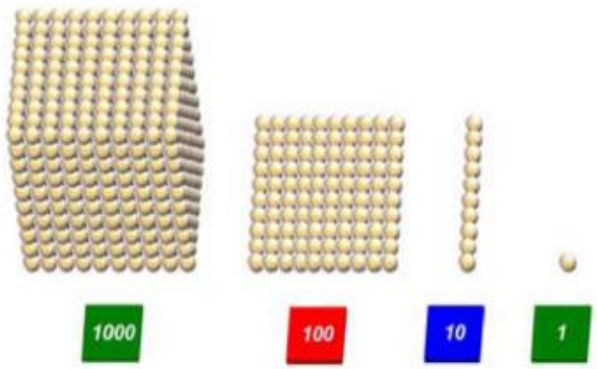
Les jeunes enfants ont du mal à extraire la signification abstraite d'un symbole sans explicitation.

La guidance de l'enseignant peut être verbale ou non verbale.

L'explication permet à l'enfant de diriger son attention vers les caractéristiques pertinentes du matériel (i.e. l'aspect mathématique) *(Kirschner, Sweller & Clark, 2006)*

Les études dans lesquelles l'utilisation des manipulatifs était accompagnée par un haut niveau d'aide pédagogique révélaient plus d'effets que les études avec un faible niveau *(Carbonneau et al; 2013)*

Exemple



Bilan 5. Des critères sur le matériel

4 principes généraux d'application des manipulatifs, identifiés par les sciences cognitives, sont susceptibles de mener à un meilleur apprentissage des mathématiques.

- Utiliser le manipulatif de façon constante et sur une longue période
- Commencer par des représentations transparentes et avancer petit à petit vers des représentations plus abstraites
- Eviter les manipulatifs qui ressemblent à des objets de la vie de tous les jours ou ont des caractéristiques non pertinentes qui déconcentrent
- Expliquer la relation entre le manipulatif et le concept mathématique de façon explicite

SDUNCI

Une petite pause pour noter vos « SDUNCI »

Phase	SDUNCI	Pour moi	Pour accompagner
Temps 1			
Temps 2			
Temps 3			
Temps 4			
Temps 5	Surprenant ? Déroutant ? Utile ? Nouveau ? Connu ? Intéressant ?		
Temps 6			

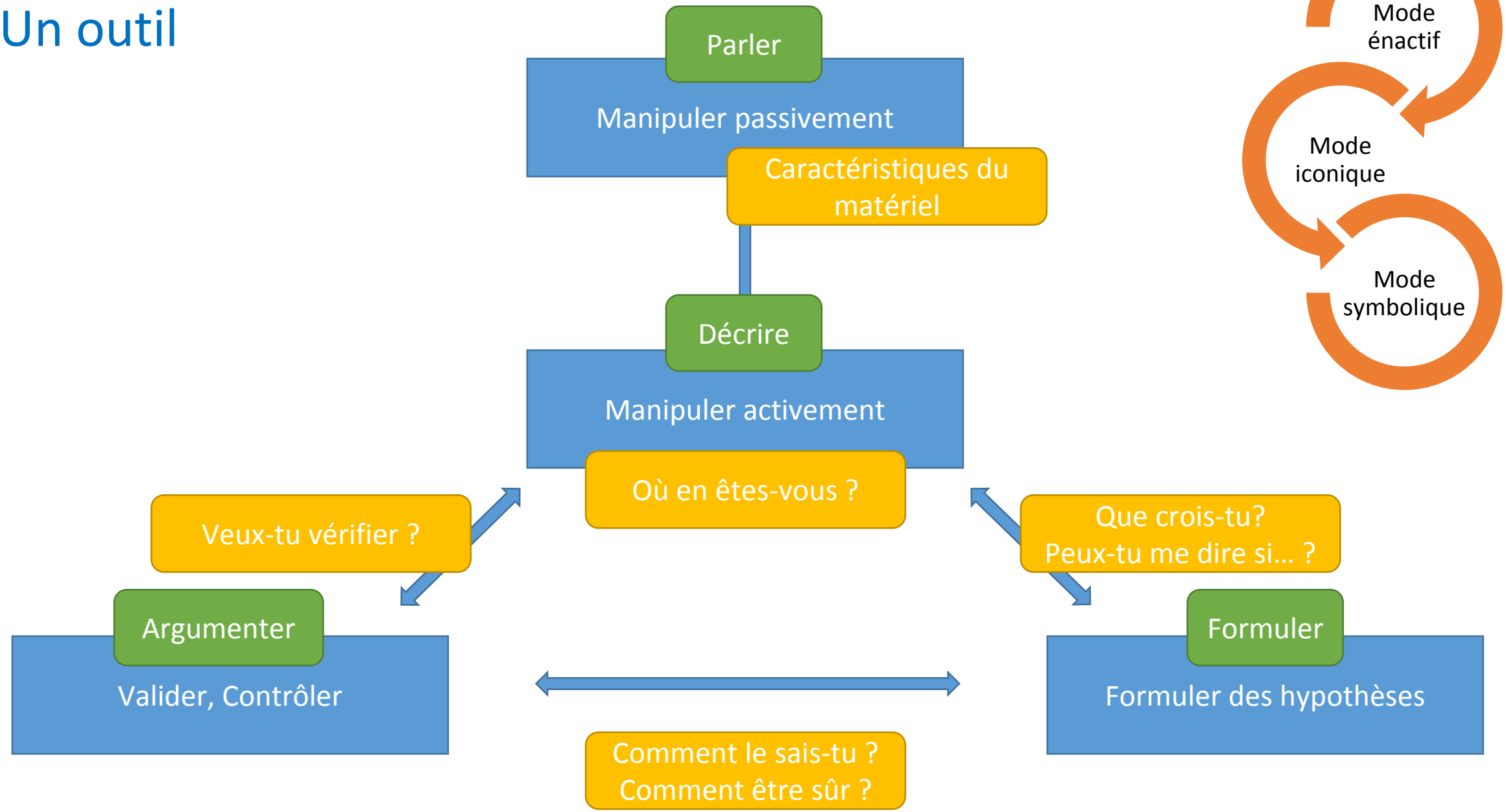
Temps 9

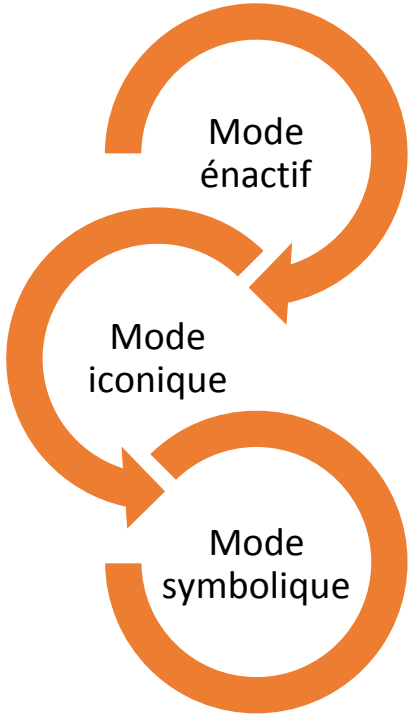
Analyse de situations emblématiques
Montessori et le mode énactif

- Retour sur la vidéo « des jetons »
- Manipulation passive ou active ?
- Est-ce que les critères sur le matériel sont présents ?
- Quels leviers peut-on apporter à l'enseignant pour faire entre l'élève dans une manipulation active ? Dans une phase de formulation ? De validation ?

Bilan 5. Apports didactiques

Un outil

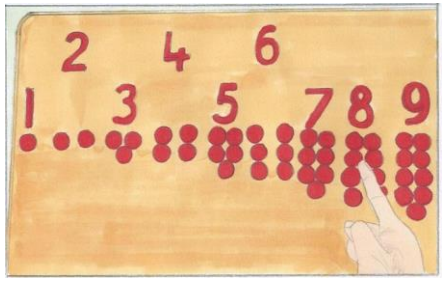




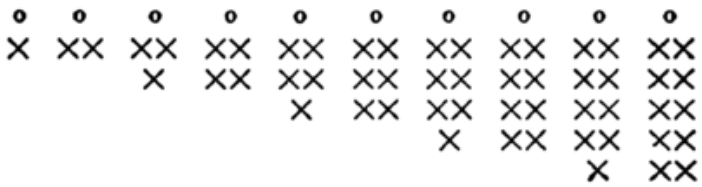
Bilan 5. Apports mathématiques

La parité en arithmétique : un outil clef et accessible

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

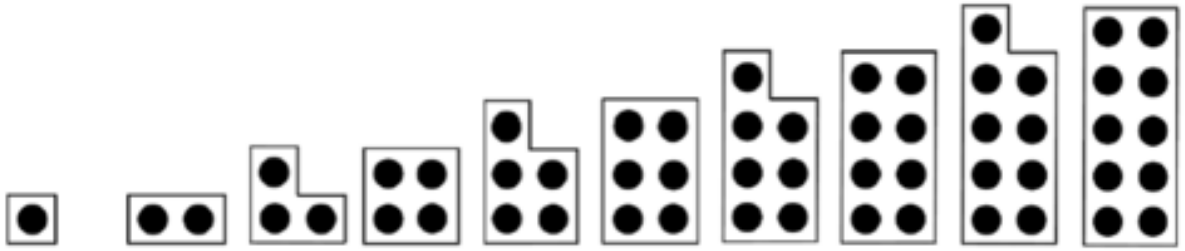


When the child has gathered up his objects he arranges them upon his own table, in columns of two, and if the number is uneven, he places the odd piece at the bottom and between the last two objects. The arrangement of the pieces is therefore as follows: —



Les jetons Montessori

Intrinsèque ou lié à l'écriture décimale ?



Les plaquettes Herbinière-Lebert

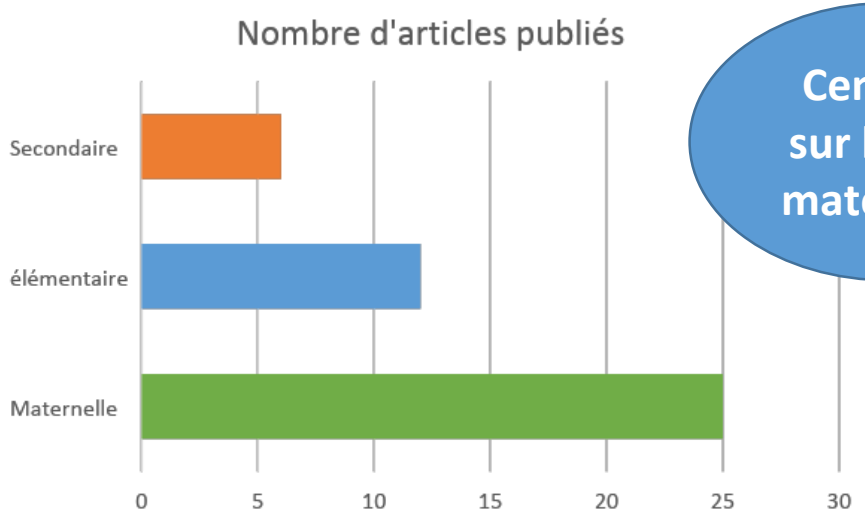
Bilan 5. Apports didactiques
Montessori et le mode énactif

- Points forts :
  - Mode énactif présent
  - Relations systématiques et énactives entre les nombres

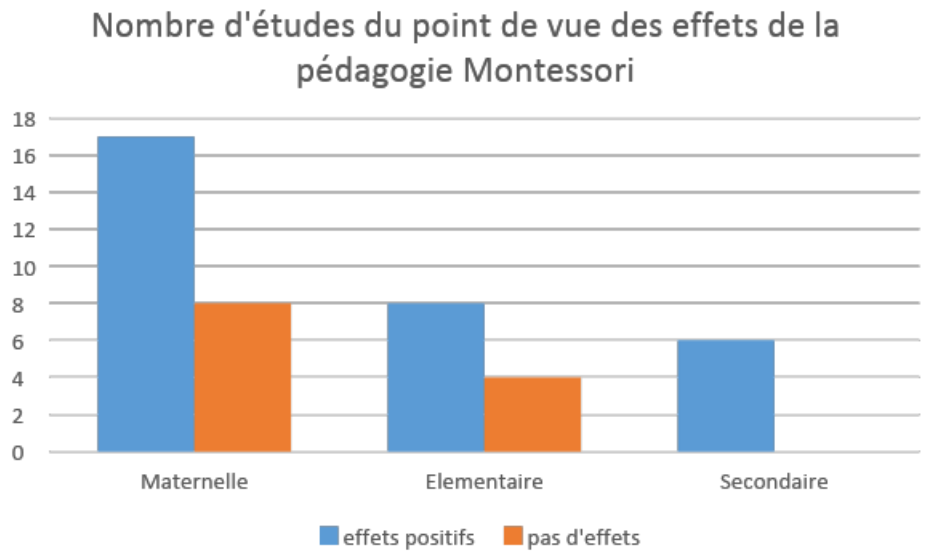
- Points faibles :
  - Mode iconique absent
  - Explicitation faible de la part du PE et de l'élève
  - Peu de garantie de manipulation active (vis-à-vis de l'objectif visé)

Bilan 5. Apports didactiques

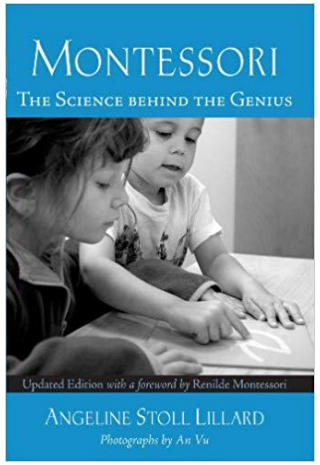
Montessori : état des recherches actuelles



Centrées sur l'école maternelle



Des études menées dans des catégories sociaux professionnelles favorisées.



Menées aux USA

Des résultats contrastés et parfois contradictoires sur les effets de la pédagogie sur les apprentissages.

Bilan 5. Apports didactiques

Montessori : état des recherches actuelles

Evaluating Montessori Education

Lillard & Else-Quest, 2006, Science

Etude transversale comparant 112 élèves américains en écoles Montessori ou traditionnelles

Assignés aux groupes avec un système de loterie : tous les parents étaient volontaires pour la pédagogie Montessori

Un groupe évalué à 5 ans et un autre groupe à 12 ans, avec différents tests cognitifs et sociaux

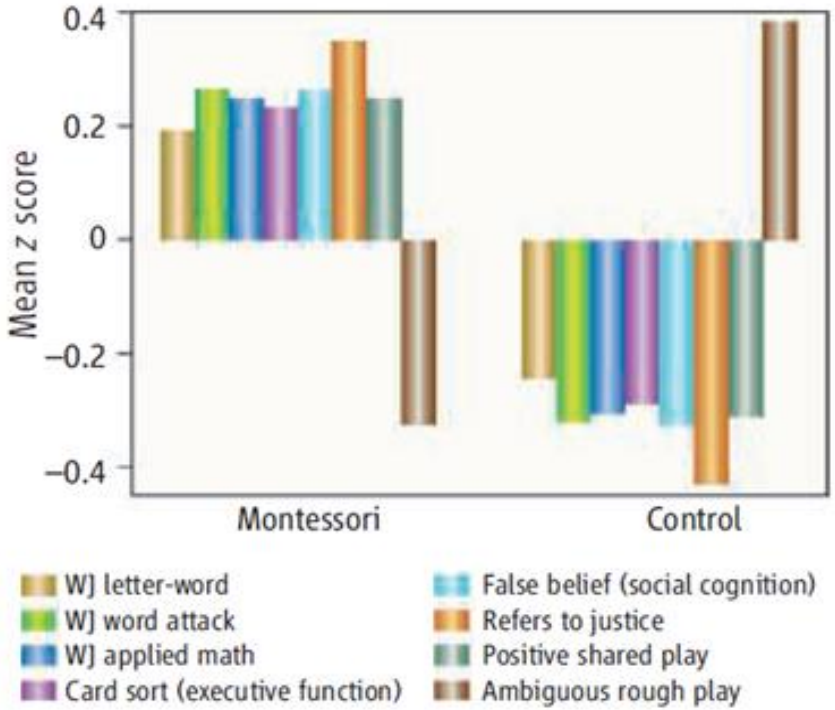
Bilan 5. Apports didactiques

Montessori : état des recherches actuelles

À 5 ans :

- Les élèves en Montessori avaient de meilleures compétences aux tests de mathématiques, langage, flexibilité cognitive, théorie de l'esprit et en interactions sociales

- Pas de différence entre les groupes en raisonnement, vocabulaire et inhibition



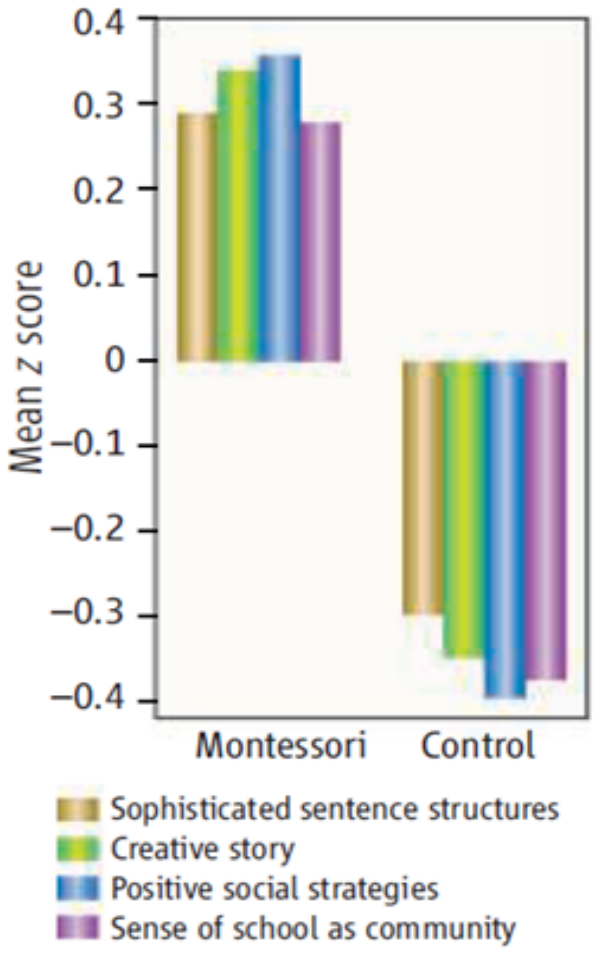
Results for 5-year-olds. Montessori students achieved higher scores [converted to average *z* scores (*18*)] for both academic and behavioral tests.

Bilan 5. Apports didactiques
Montessori : état des recherches actuelles

A 12 ans:

• Les élèves en Montessori rédigeaient des histoires plus créatives et avec des structures de phrases plus sophistiquées (pas de différence entre les groupes en orthographe, ponctuation et grammaire) et avaient également de meilleures compétences sociales

•Par contre, il n'y avait plus de différence entre les groupes dans les tâches de mathématiques et langage.



Results for 12-year-olds.

Bilan 5. Apports didactiques

Montessori : état des recherches actuelles

Des biais

- Contexte familial favorable
- Des groupes différents
- Pas d'évaluation à moyen ou long terme
- Fidélité de la mise en œuvre de la pédagogie variable

Des questions en suspens :

- Existe-t-il un effet universellement bénéfique de la pédagogie Montessori ?
- Quels aspects de la pédagogie peuvent expliquent ces résultats ?

La recherche au sein de l'école, « écologique », est compliquée mais nécessaire

Analyse de situations emblématiques
Singapour

Résoudre le problème suivant (seul)

> Un pépiniériste vend des plants de légumes.
> Il en vend les 3/5 le matin.
> Il vend un quart de ce qui lui reste l'après-midi sachant qu'il en vend 200 de plus le matin que l'après midi.
> Combien avait-il de plants au départ ?

En binôme, confrontez vos solutions ?

Comment peut faire un élève de cycle 3 ?

Analyse de situations emblématiques
Singapour et le mode iconique

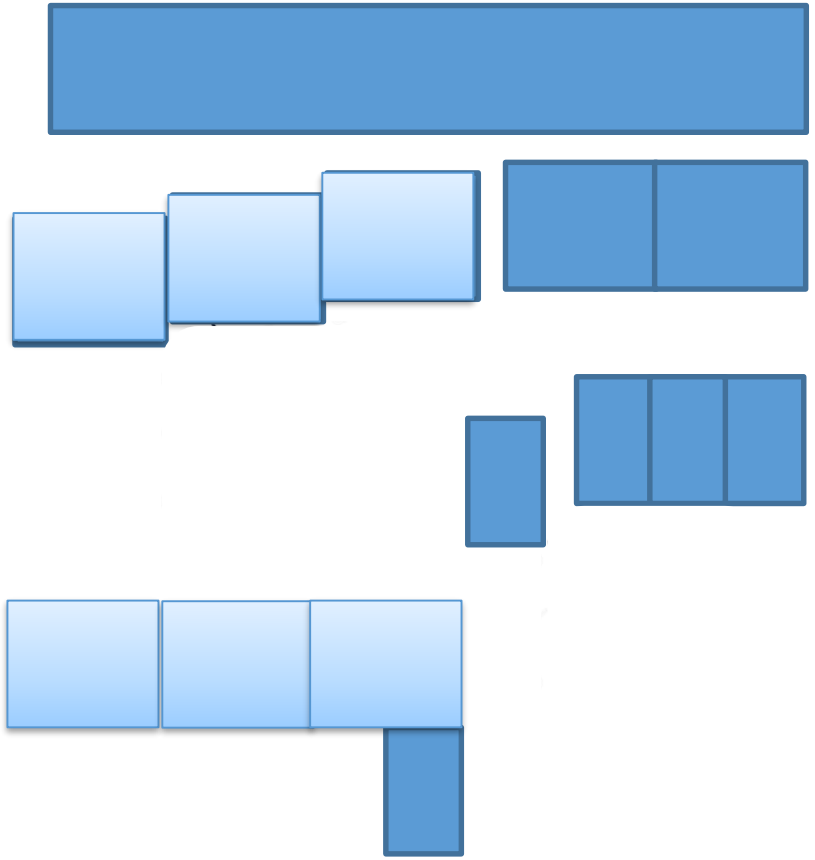
Un pépiniériste vend des plants de légumes.

Il en vend les 3/5 le matin.

Il vend un quart de ce qui lui reste l'après-midi

Sachant qu'il en vend 200 de plus le matin que l'après midi.

Combien avait-il de plants au départ ?

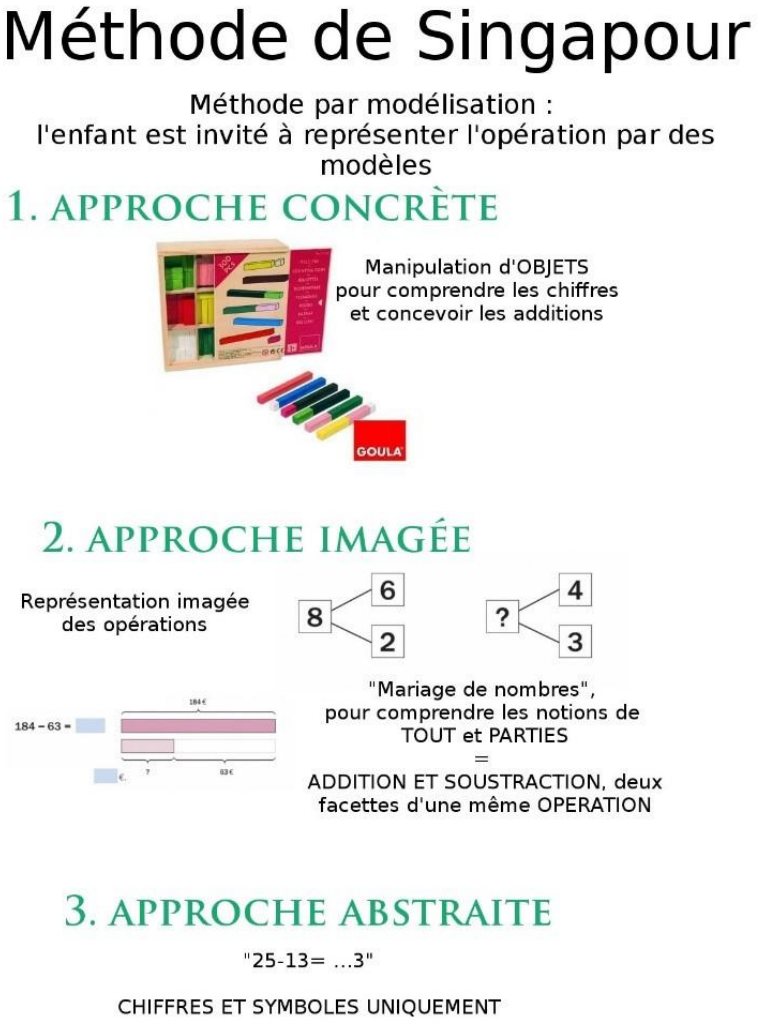


Bilan 6. Apports didactiques

Singapour et le mode iconique

- Points forts :
  - Articulation des trois modes
  - Résolution de problèmes
  - Introduction précoce des opérations

- Points faibles :
  - Explicitation dépendante de l'enseignant : Vidéo CAS
  - Dans la méthode française, « lenteur » en CP (petits nombres)



Bilan 6. Apports didactiques
Singapour et le mode iconique

Trois niveaux de facteurs (Dimmock & Tan, 2013)

- **Niveau macro** : Facteurs socio-culturels et économico-politiques
- **Niveau organisationnel** : Qualité des écoles, de la formation des professeurs, du curriculum
- **Niveau familial** : Socialisation et accompagnement éducatif parental

Aucune différence significative n'a été apportée par l'utilisation seule des ressources singapouriennes dans un district américain, voire une baisse de réussite pour l'ensemble des élèves les plus performants est observée.
(Kuska, 2014)

SDUNCI

Une petite pause pour noter vos « SDUNCI »

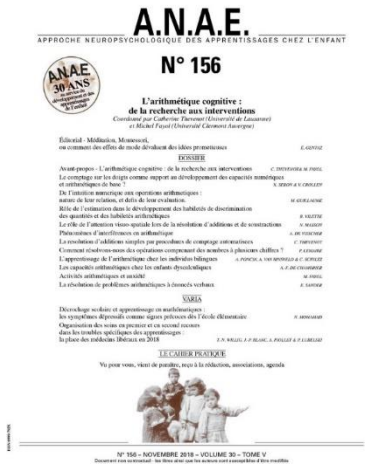
Phase	SDUNCI	Pour moi	Pour accompagner
Temps 1			
Temps 2			
Temps 3			
Temps 4			
Temps 5			
Temps 6	Surprenant ? Déroutant ? Utile ? Nouveau ? Connu ? Intéressant ?		

Synthèse de la formation

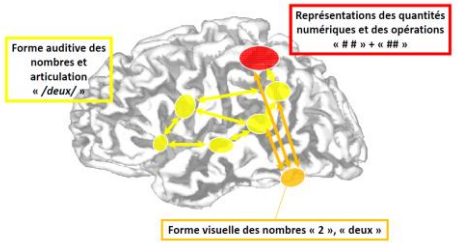
Bilan. Apports Sciences Cognitives

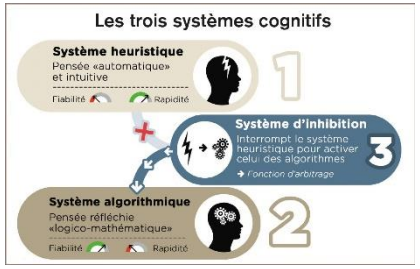
- Des neuromythes à identifier et comprendre
- Vigilance sur les lectures de vulgarisation

- Des recherches de nature différente en neuroéducation
- Intéressant de les reconnaître et identifier leur robustesse



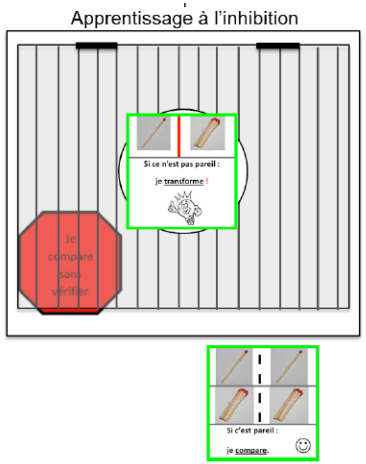
Bilan. Apports Sciences Cognitives

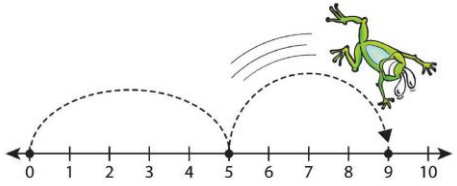




- Des recherches fondamentales

- Des recherches appliquées pour évaluer des effets sur les apprentissages.
  - Des apports de connaissances aux élèves en neurosciences cognitives
  - Des situations d'apprentissage basées sur des résultats en neurosciences cognitives
    - Sur le fonctionnement général du cerveau (par ex. fonctions exécutives)
    - Sur des mécanismes cérébraux spécifiques aux mathématiques (par ex. cognition numérique)





Bilan. Des points de vigilance

Quelques mots de prudence…

- Toute recherche scientifique présente une part d'incertitude
- Beaucoup des résultats de sciences cognitives et d'imagerie cérébrale sont récents et demandent à être confirmés.
- Même si les processus cognitifs de l'enfant étaient entièrement connus, on ne pourrait pas en déduire, directement, quelle est « la » méthode optimale d'enseignement.
- Par le passé, certaines tentatives de passage trop rapide de la connaissance scientifique à l'enseignement ont conduit à des erreurs. (L'idée de lecture globale est d'ailleurs issue de la psychologie: Cattell, Claparède, Piaget, Wallon)

→ Les sciences cognitives ne prescrivent pas de méthode unique d'enseignement

→ Elles peuvent, par contre, contribuer à **évaluer scientifiquement** l'efficacité de méthodes existantes.

N'allons pas trop vite !

Dehaene, Collège de France, 2012

Bilan. Etapes d’enseignement

- Manipuler est-il suffisant?

Non manipuler passivement est insuffisant. Il faut rentrer dans un triptyque expérimental.

Situation : course à 20 en énactif. Vidéo de Eysseric

- Le triptyque en mode énactif est-il suffisant ?

Non, besoin du mode symbolique.

Situation : les polyèdres.

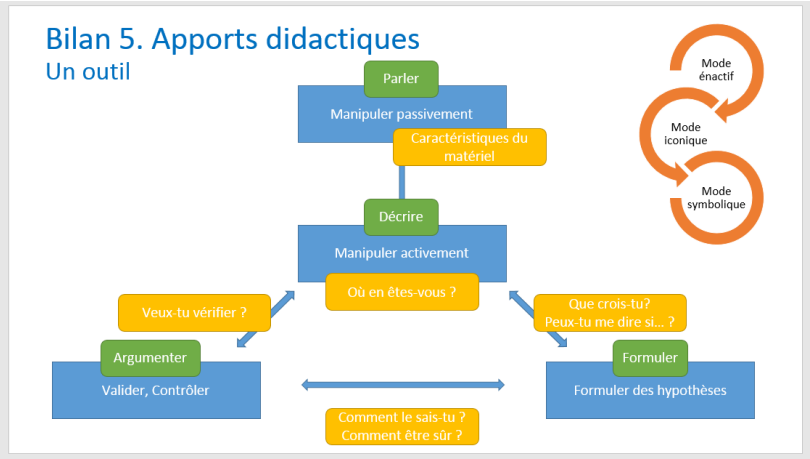
- Le mode énactif est-il nécessaire ?

Pas toujours et pas pour tous. On peut rester dans un mode symbolique. On peut manipuler en mode symbolique. En revanche, la manipulation est nécessaire !

Situation: la course à 20 en symbolique ou Somme d'entiers consécutifs

Bilan. Etapes d’enseignement

Des leviers



Maitriser les mathématiques sous-jacentes

La manipulation active passe par une dialectique de formulation et de validation

Elaboration de la situation d’apprentissage (stratégies gagnantes, énoncé du problème, etc.)

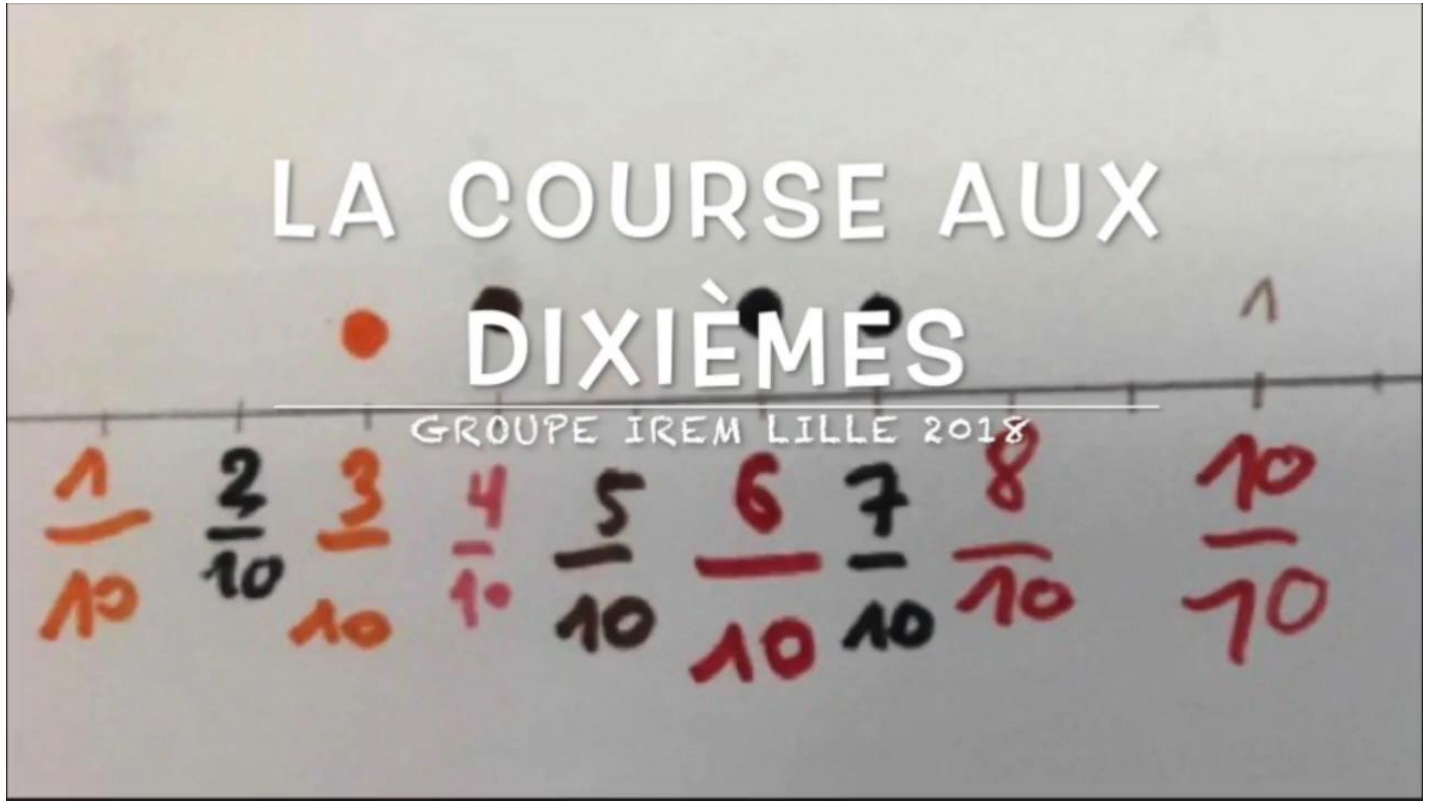
La verbalisation, un levier pour la manipulation active

- Proposer de tester (peux-tu faire…)
- Proposer d’anticiper (à ton avis,…)
- Formuler des hypothèses, des conjectures (que penses-tu?)

Le mode iconique, un levier entre mode énactif et symbolique

Prolongements

Des exemples à analyser à l’aide du tryptique



https://irem.univ-lille1.fr/spip.php?article444

https://www.youtube.com/watch?v=Td8naH4Rhhk

Manipuler, verbaliser, abstraire dans l'enseignement des mathématiques

Éclairages didactiques

merci

Marie-Caroline Croset
marie-caroline.croset@univ-grenoble-alpes.fr
Marie-Line Gardes
marie-line.gardes@univ-lyon1.fr

Références – *Manipuler – verbaliser - abstraire*

- Dias, T. (2012). *Manipuler et expérimenter en mathématiques*. Magnard.
- Dias, T. (2009). La dimension expérimentale en mathématiques – Un exemple avec la situation des polyèdres - Cycle 3. *Gand N 83*, 63-83.
- Dias, T & Durand-Guerrier, V. (2005). Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères-IREM 60*, 61-78.
- Durand-Guerrier, V. (2010). La dimension expérimentale en mathématiques : Enjeux épistémologiques et didactiques. In *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. INRP, Cédérom.
- Eysseric, P. (2014). Mettre au centre la résolution de problèmes. *Cahiers pédagogiques, 517*, 48-50.
- Gardes, M.-L. (2018). Démarches d'investigation et recherche de problèmes. In G. Aldon, *Le Rallye mathématique, un jeu très sérieux !* (pp.73-96). Canopé Editions.
- Tanguay, D. & Grenier, D. (2008). L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratiques et théoriques des polyèdres réguliers. *Petit x 78*, 26-52.
- Perrin, D. (2007). L'expérimentation en mathématiques. *Petit x*, 7 , 6-34.

Sur les modes de représentation :

- Barth, B.-M. (2011). *L'apprentissage de l'abstraction*. Retz.
- Bruner, J. S. (1973). *The relevance of education*. New York : Norton.

Références – *Recherches en sciences cognitives*

- Carbonneau, K. J., Marley, S. C., & Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, *105*(2), 380.
- Kalyuga, S. (2009). The expertise reversal effect. In *Managing Cognitive Load in Adaptive Multimedia Learning* (pp. 58-80). IGI Global.
- Laski, E. V., Jor'dan, J. R., Daoust, C., & Murray, A. K. (2015). What makes mathematics manipulatives effective? Lessons from cognitive science and Montessori education. *SAGE Open*, *5*(2), 2158244015589588.
- Gentaz, E. (2018). *Du labo à l'école : le délicat passage à l'échelle*. La Recherche 539.

Références – *Sur Montessori et Singapour*

Sur Montessori

- Gardes, M.-L. & Courtier, P. (2018a). Quelle manipulation, représentation et communication dans les ateliers Montessori de première numération ? *Grand N, 101*, 83-105.
- Lillard & Else-Quest, (2006). The early years: Evaluating Montessori Education. *Science, 313(5795)*, 1893-1894.

Sur Singapour

- Dimmock, C., & Tan, C. Y. (2013). Educational leadership in Singapore. *Journal of Educational Administration, 51(3)*, 320-340.
- Kuska, C. (2014). *Math in Focus: Singapore Math and the Student Achievement of 4th Grade Students* [Report submitted to Professional Education Faculty of Northwest Missouri State University].

- Grand N 102 (2018) – Plusieurs articles sur la méthode de Singapour.

Références - *Articles de recherche – Pour aller plus loin*

- Bailly, F., & Longo, G. (2003). Espace, temps et cognition. *Revue de synthèse*, *124*(1), 61-118.
- Bara, F., & Tricot, A. (2016). Le rôle du corps dans les apprentissages symboliques: apports des théories de la cognition incarnée et de la charge cognitive. *Recherches sur la philosophie et le langage*.
- Bara, F., & Gentaz, E. (2011). Haptics in teaching handwriting: The role of perceptual and visuo-motor skills. *Human movement science*, *30*(4), 745-759.
- Bara, F., Gentaz, E., & Colé, P. (2007). Haptics in learning to read with children from low socio-economic status families. *British Journal of Developmental Psychology*, *25*(4), 643-663.
- Bara, F., Gentaz, E., Colé, P., & Sprenger-Charolles, L. (2004). The visuo-haptic and haptic exploration of letters increases the kindergarten-children's understanding of the alphabetic principle. *Cognitive development*, *19*(3), 433-449.
- Bkouche, R. (1982). Les mathématiques comme science expérimentale. *Bulletin APMEP,* 333, 306-324.
- Dias, T. (2008). La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage. *Thèse de doctorat*, Université Claude Bernard Lyon 1.
- Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive psychology*, *15*(1), 1-38.

Références - *Articles de recherche – Pour aller plus loin*

- Kirschner, P. A., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based, experiential, and inquiry-based teaching. *Educational psychologist*, *41*(2), 75-86.
- Martin, T. (2009). A theory of physically distributed learning: How external environments and internal states interact in mathematics learning. *Child Development Perspectives*, *3*, 140-144.
- McNeil, N. M., Uttal, D. H., Jarvin, L., & Sternberg, R. J. (2009). Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems. *Learning and instruction*, *19*(2), 171-184.
- Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2009). Playing linear number board games—but not circular ones—improves low-income preschoolers' numerical understanding. *Journal of educational psychology*, *101*(3), 545.
- Singer, M. A., & Goldin-Meadow, S. (2005). Children learn when their teacher's gestures and speech differ. *Psychological Science*, *16*, 85-89.
- Son, J. Y., Smith, L. B., & Goldstone, R. L. (2011). Connecting instances to promote children's relational reasoning. Journal of Experimental Child Psychology, 108(2), 260-277.
- Sowell, E. J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for research in mathematics education*, 498-505.