Comment mettre la terre à plat ?
Se repérer et se déplacer à la surface de la terre (ou en navigation aérienne) ?

Cette question peut concerner la spécialité mathématique uniquement(avec une approche algorithmique), ou être croisée avec les sciences physiques, l'histoire et la géographie,…

Remarques :

- Le thème « ***se repérer sur une terre sphérique*** » a été abordé en enseignement scientifique de la classe de première
- Méridien et longitude ; Parallèle et latitude ; coordonnées géographiques, grands cercles de la sphère terrestre, longueur d'un arc de cercle de rayon r et d'angle au centre θ : θr avec Θ exprimé en radians. Première « approche » de la notion d'orthodromie et de loxodromie (à partir de l'utilisation d'applet et visualisons éventuelle sur la sphère terrestre et une carte de de Mercator))
- (Voir également sujet Zéro enseignement scientifique de première)

- On peut se poser de multiples questions (et ne pas répondre à toutes les envisager en prolongement à la fin de son exposé devant le jury)
- *Les définitions données par les « sciences physiques «   d'un parallèle et d'un méridien » au cours du temps (de l'antiquité à maintenant)*
- ***La géométrie euclidienne/ la géométrie sphérique*** *; la notion de plus court chemin entre deux points, notion de géodésique ; Orthodromie /Loxodromie (lien à établir avec la projection de Mercator)*
- Les différentes projections permettant de représenter sur une surface plane la sphère terrestre : la projection de Mercator (projection cylindrique conforme qui conserve les angles mais pas les distances)
- Se repérer grâce aux satellites : principe de la géolocalisation (abordée en SNT)
- Les différents instruments de mesure au cours du temps : le sextant, les GPS
- Comment déterminer le rayon de la terre
- Comment déterminer la longueur d'un méridien
- ….

<u>Situations déclenchantes</u>

Plusieurs possibilités non exhaustives

*un intérêt particulier pour la navigation maritime ou aérienne, l'astronomie, des études d'ingénieur en aéronautique,….

* après avoir traité, ou comme *situation introductive*, du thème **d'approfondissement « intersection d'une sphère et d'un plan ,**réinvestissement des activités traitées en enseignement scientifique concernant le thème « **se repérer sur la sphère terrestre** »

<u>*Ou Devoir en temps libre ou *activité de recherche en classe en groupe* sur le thème D'approfondissement</u> **: intersection d'une sphère et d'un plan** du programme de spécialité de terminale.

Remarque : la détermination du rayon du cercle matérialisant le parallèle de latitude θ a déjà été <u>abordé en cycle 4</u>. ($r = R\cos\theta = R\cos Lat$)

<u>Le cœur de l'activité</u> pourrait porter sur Les notions abordées ci-dessous(**en rapport avec des éléments du programme de spécialité mathématique** ; celles-ci pouvant également **faire partie <u>du cheminement</u>** <u>de l'élève lors de la résolution de la question posée et être reporté dans son « cahier de suivi »</u>

- ***position relative d'une sphère et d'un plan,*** dans le cas général, <u>d'un point de</u> <u>vue</u> **<u>géométrique</u>** (soit d la distance d'un point à un plan , cas particulier du centre de la sphère de centre O et de rayon R, justification des trois cas : plan tangent si d=R , intersection vide si d >R, et cercle de centre H projeté orthogonal de O sur le plan et de rayon $r = \sqrt{(R^2 - d^2)}$ si d<R)

-***position relative d'une sphère et d'un plan,*** dans le cas général, d'un point de vue **analytique** :

-*équation cartésienne d'une sphère* (approfondissement « rapide »)

-**distance d d'un point A au plan (P)** $ax + by + cz = d$:

$$d = \frac{|ax_A + by_A + cxz_A|}{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}}$$

Et Détermination du centre : intersection de la sphère (équation cartésienne) et de la droite passant par le centre de la sphère et de vecteur directeur, un vecteur normal au plan P (équation paramétrique) ; détermination du rayon.

-**autre démarche on se donne deux points A et B de la sphère** et on détermine l'intersection du plan (AOB) (détermination de son équation cartésienne) et de la sphère.

Pour les points A et B coordonnées cartésiennes, coordonnées géographiques ,coordonnées sphériques?

-on obtient des grands cercles de la sphère

-considérer **dans un premier temps des grands cercles qui sont des parallèles de latitude donnée Lat=Θ** ; et de longitudes données $\boldsymbol{\varphi_A}$ ***et*** $\boldsymbol{\varphi_B}$

On peut considérer deux points A et B de ce parallèle ; se pose la question de déterminer la longueur de l'arc $\widehat{AB}$;le parallèle étant représenté par un cercle, on détermine son centre et son rayon ($r = R\cos\theta = R\cos Lat$); on conclue en utilisant la différence de longitude des points A et B.

Remarque : le cas où les points A et B appartiennent à un même méridien se résout de façon similaire

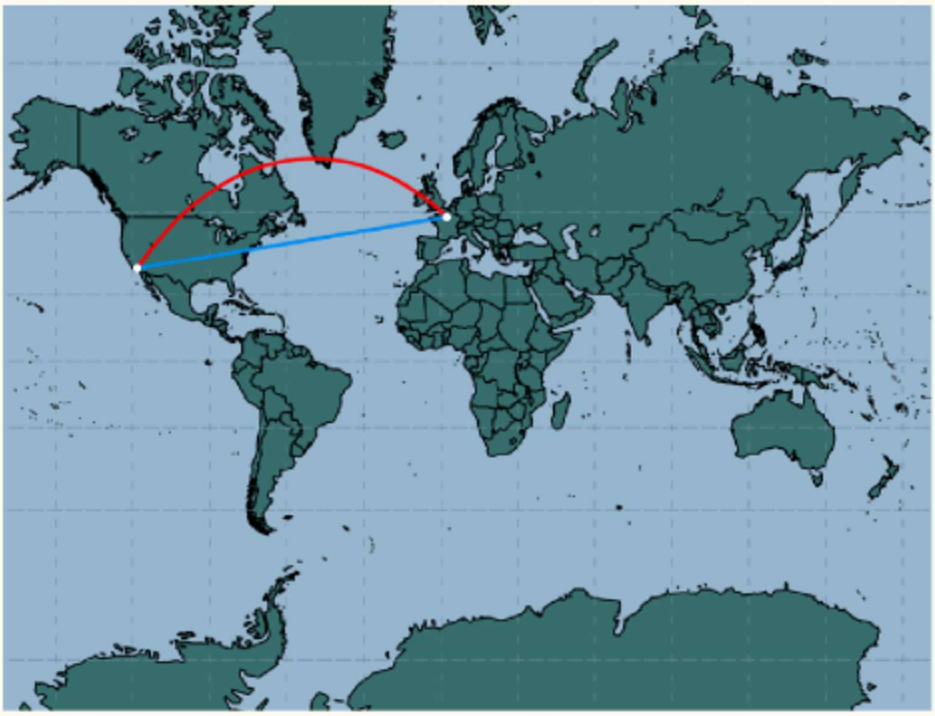
Dans un second temps le cas général qui constitue le corps de la question :

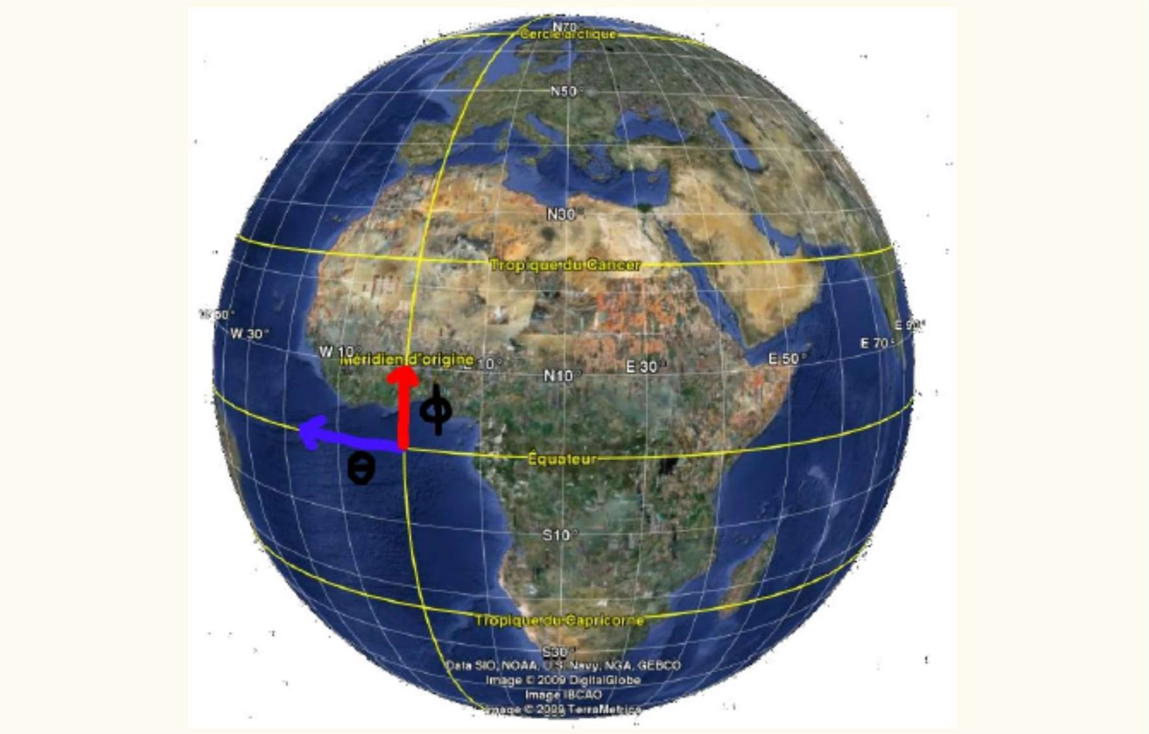
Cas où les points A et B n'appartiennent pas à un même parallèle ou un même méridien ; on connait les coordonnées géographiques des points A et B.

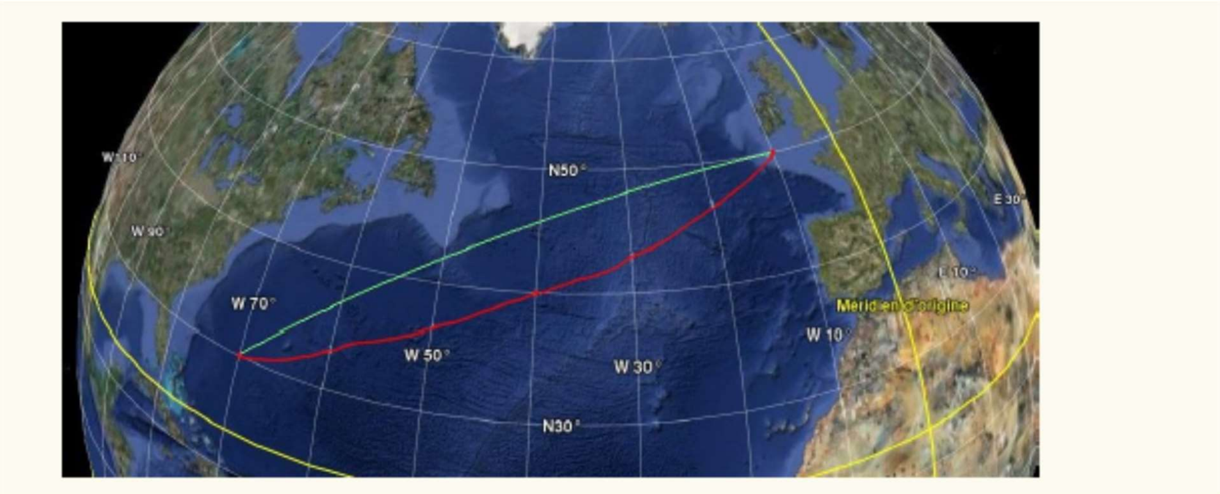
Rappel sur ce qui a pu être traité en enseignement scientifique (présentation d'applets permettant de calculer une orthodromie et loxodromie et de cartes utilisant la projection de Mercator si ce n'est déjà fait) ; des exemples ci-dessous

Comment mettre la terre à plat ?

Se repérer et se déplacer à la surface de la terre (ou en navigation aérienne) ?







Cheminement « possible « de l'élève
(à consigner dans le carnet de suivi)

En autonomie ou aidé si nécessaire par le professeur ou un « expert »

-il faut déterminer (comme dans le cas précédent) une mesure de l'angle $\widehat{AOB}$ (exprimé en radians)

Elément de programme « mobilisable » par l'élève le produit scalaire

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA.OB\cos\widehat{AOB}$$

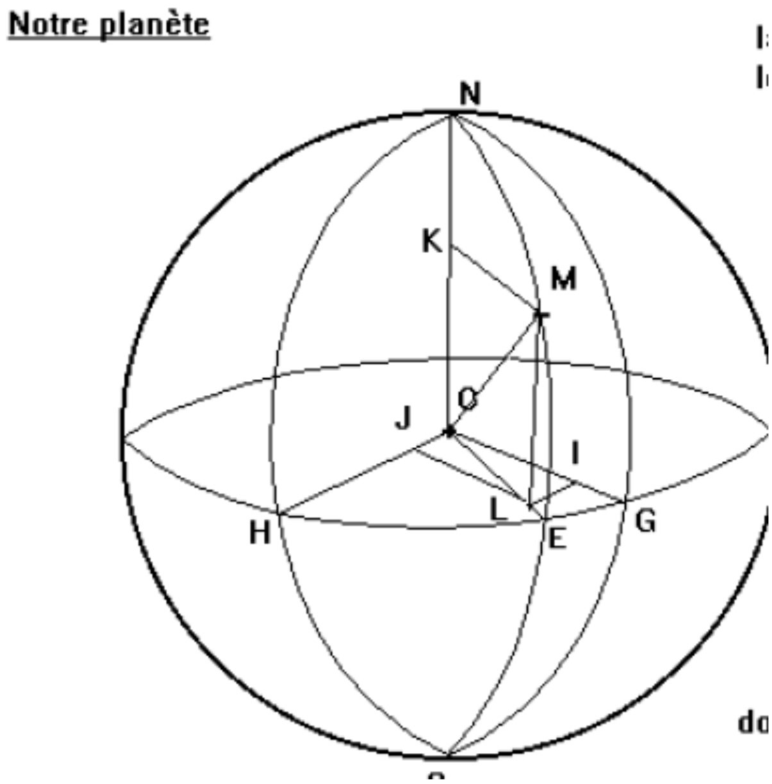
Remarque : pour simplifier la présentation suivante on envisage le cas **R=1 ;** la cas d'un rayon R quelconque (celui de la terre 6371kms par exemple) est homothétique

-On sait également (ou on le montre ; bilinéarité du produit scalaire) que dans un repère orthonormé :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = x_A.x_B + y_A.y_B + z_A z_B$=OA.OB.cos $\widehat{AOB}$=cos $\widehat{AOB}$ (cas R=1)

- **Question** (**cheminement « possible « de l'élève**) : comment déterminer les coordonnées cartésiennes lorsque l'on connait les coordonnées géographiques ?

Réponse : on utilise les **coordonnées sphériques (**recherche personnelle ou aidée par un « expert »)



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{OK}$

$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{OK}$

(Éléments de programme : décomposition d'un vecteur de l'espace)

Schéma à faire à « main levé » sur la fiche de préparation à remettre au jury

M a pour coordonnées géographiques : R , Lat=θ_M ,long=φ_M

On obtient : les formules reliant les coordonnées cartésiennes avec les coordonnées géographiques

$x_M = \cos\theta \cos\varphi$

$y_M = \cos\theta \sin\varphi$

$z_M = \sin\theta$

Avec des notations évidentes (**concernant les points A et B**)on obtient :

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \cos\theta_A.\cos\theta_B\,(\sin\varphi_A\,\text{sins}\,\varphi_B + \cos\varphi_A\cos\varphi_B) + \sin\theta_A\sin\theta_B$

$=\cos\theta_A.\cos\theta_B\cos(\varphi_B - \varphi_A) + \sin\theta_A\sin\theta_B$

Et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA.OB\cos\widehat{AOB} = \cos\widehat{AOB}$

Et finalement

$$\boxed{\cos\widehat{AOB} = \cos\theta_A.\cos\theta_B\cos(\varphi_B - \varphi_A) + \sin\theta_A\sin\theta_B}$$

Formule « fondamentale **» de la géométrie sphérique (à mettre sur la fiche de préparation avec un schéma à « main levé » et les grandes étapes de la démonstration)**

Remarque : pour déterminer longueur de l'arc $\widehat{AOB}$ (la longueur de l'arc **en radians**) On se « contente » d' utiliser la touche $\cos^{-1}$ de la calculatrice ; ou on démontre en prolongement éventuel que la fonction cosinus est bijective sur l'intervalle [O ; π[; *bijection réciproque arcos*

$\widehat{AOB} = \cos^{-1}(\cos\theta_A\,.\cos\theta_B\cos(\varphi_B - \varphi_A) + \sin\theta_A\sin\theta_B)$

Et pour une sphère de rayon R , on obtient

$$\boxed{\widehat{AOB} = R\cos^{-1}(\cos\theta_A\,.\cos\theta_B\cos(\varphi_B - \varphi_A) + \sin\theta_A\sin\theta_B)}$$

A mettre sur la fiche de préparation à remettre au jury

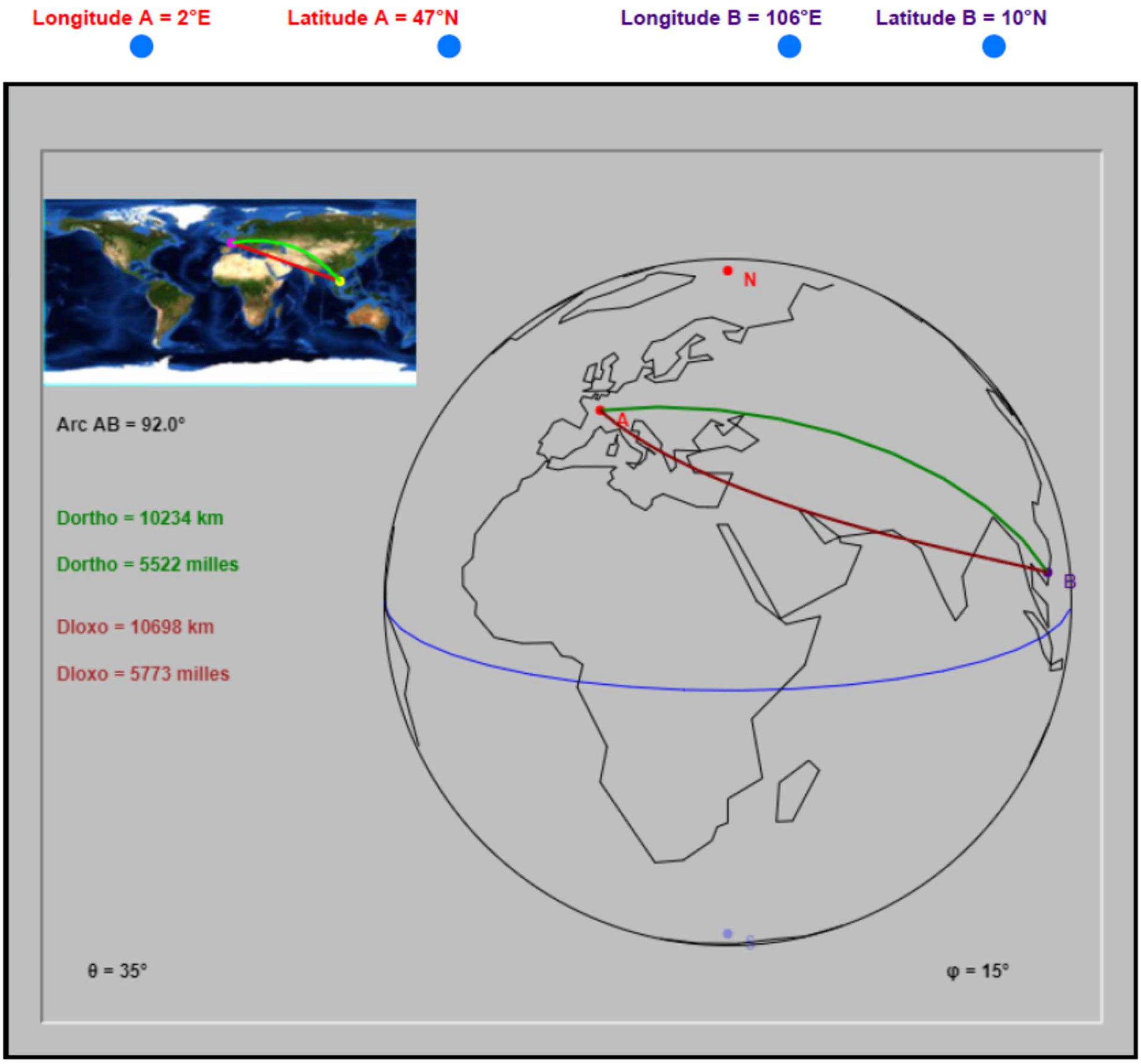
Applications numériques :

-on écrit un algorithme et un programme en Python (à faire) **et à mettre sur la fiche de préparation**

- avec pour Rayon de la sphère terrestre R=6371km

-remarque : on peut faire les calculs en mode « degré » de la calculatrice et convertir ensuite le résultat obtenu en radians pour obtenir la longueur de l'arc $\widehat{AOB}$

exemple 1 :



Exemple 2

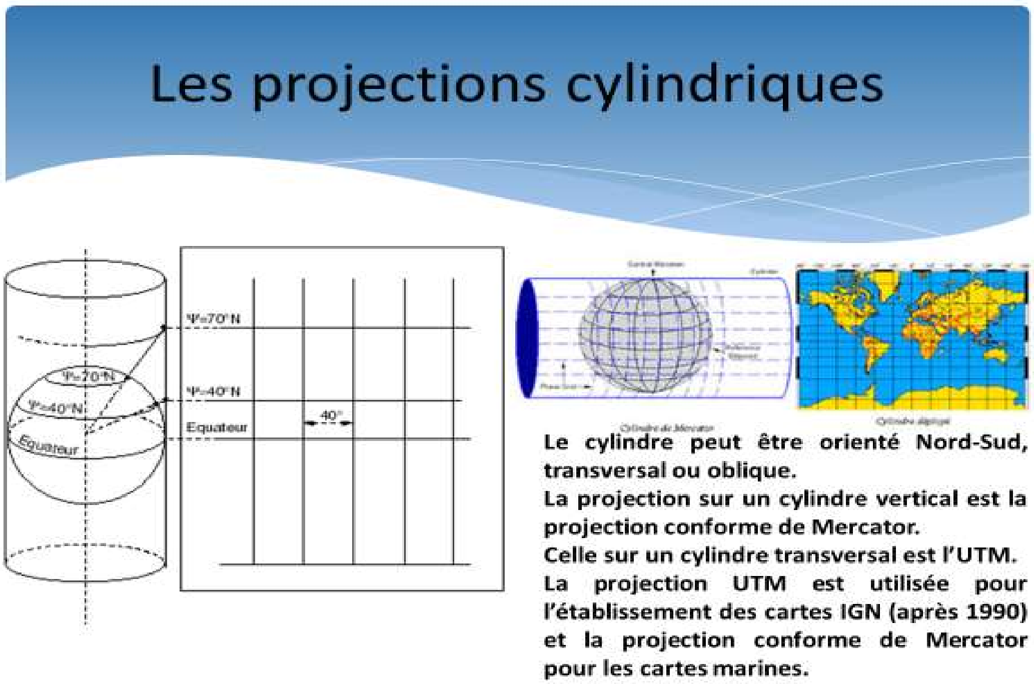
Choisir de calculer la distance orthodromique entre **st Denis de la réunion et Brisbane** (par exemple) , du cap Horn au cap de bonne espérance….

<u>Prolongements possibles (dans un ordre quelconque)</u>

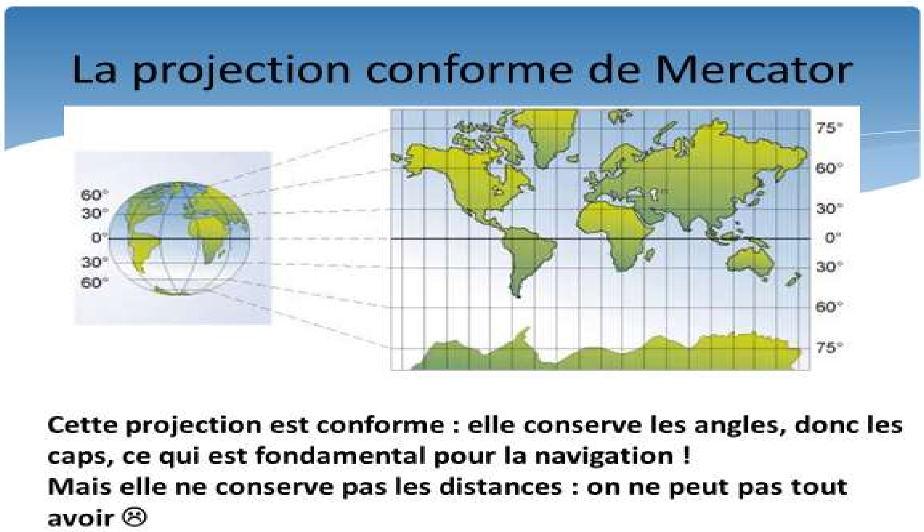
A- **<u>Comment déterminer le rayon de la terre (méthode d'Eratosthène) , la longueur d'un méridien(par triangulation ; formule des sinus)….</u>(cf le document « ressource « de l'enseignement scientifique)**

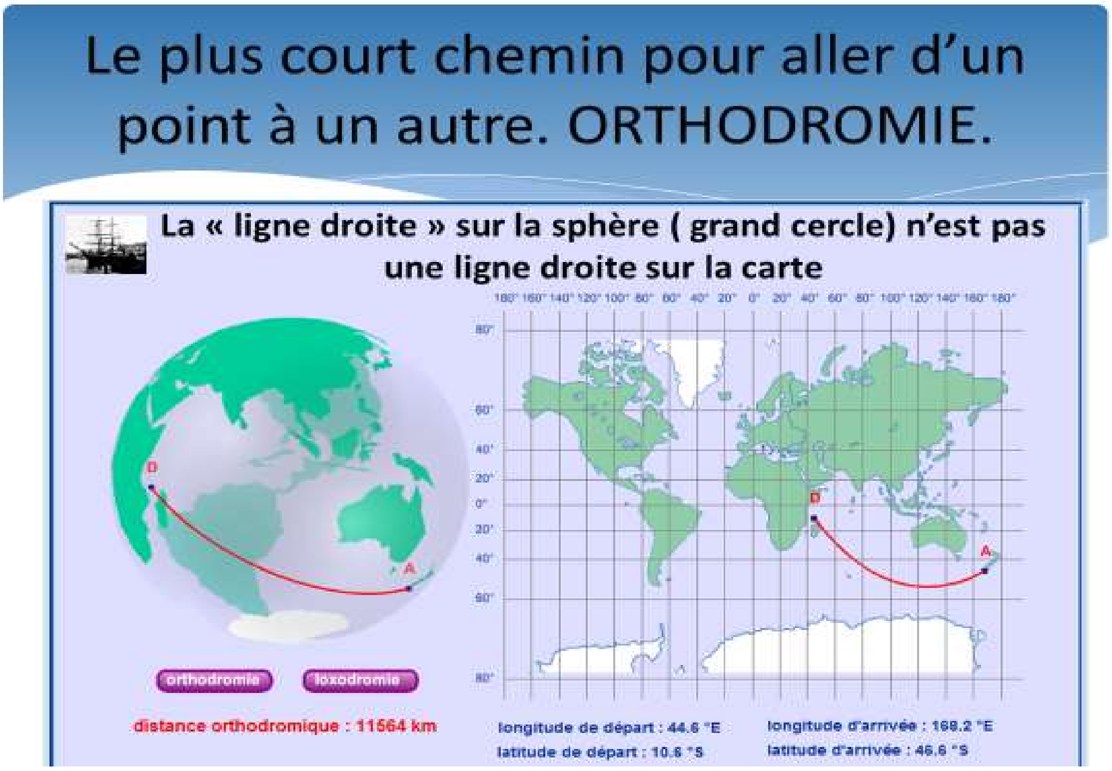
B- <u>Les cartes géographiques utilisant la projection de Mercator</u>

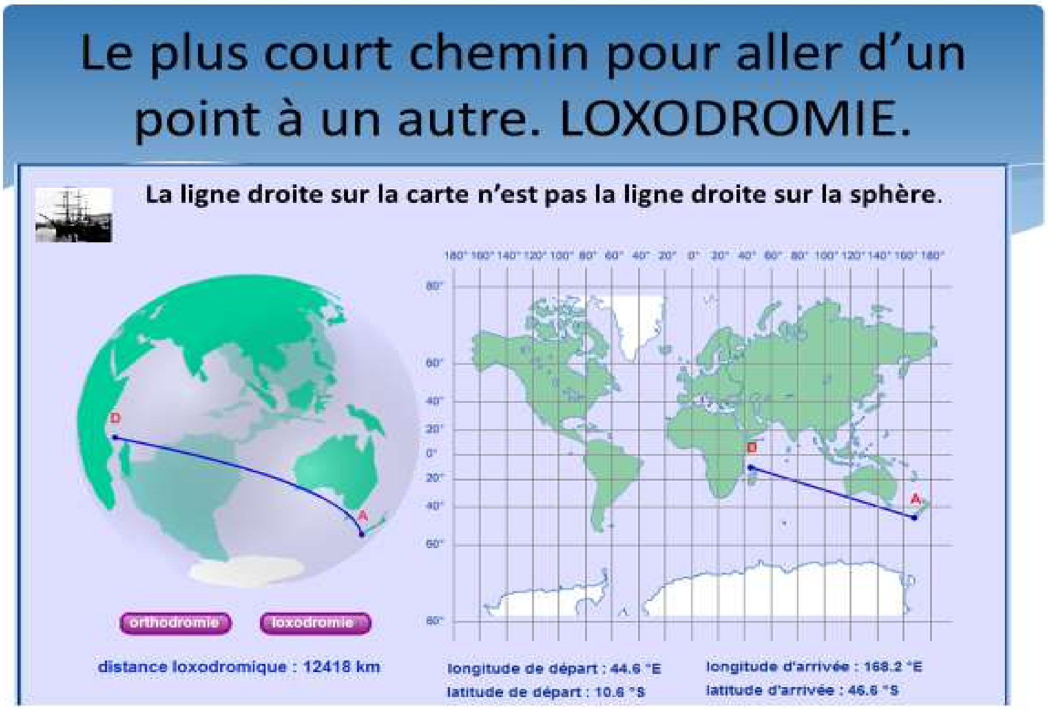
<u>Pourquoi ce choix ?</u>



<u>L'élève doit être capable à l'oral d'expliciter le principe de la projection cylindrique</u>







<u>L'élève doit expliciter à l'oral que la loxodromie consiste à « naviguer « avec un cap constant, ce que permet la carte de Mercator car elle conserve les angles :</u>

une loxodromie coupe les méridiens suivant un angle constant

-Comment calculer une loxodromie ?

Un regard vers l'enseignement supérieur (difficile)

*On utilise la notion d'arc paramétré (qui généralise la notion d'équations paramétriques de droites et de plans)

On utilise une équation paramétrique du segment [AB]

La route loxodromique de A à B est l'arc de la sphère terrestre qui correspond au segment [AB] tracé sur la carte de Mercator :

Sur cet exemple A est le cap Horn et B le cap de bonne espérance

Soit M un point du segment [AB] : On a (théorème de Thalès) :

$\frac{Lat(M)-Lat(A)}{Lat(B)-Lat(A)}=\frac{Long(M)-lo\quad(A)}{Long(B)-lo\quad(A)}$=t avec t dans l'intervalle [0 ;1]

Lat(M)=Lat(A) +t[Lat(B)-Lat(A)

Long(M)=Long(A) +t[Long(B)-Long(A)]

Avec les notations précédentes (utilisées dans les paragraphes précédents)

$\theta_M = \theta_A + t(\theta_B - \theta_A)$

$\varphi_M = \varphi_A + t(\varphi_B - \varphi_A)$ (ces formules (1) pourraient figurer sur la fiche du jury)

Or avec le résultat précédent (détermination de l'orthodromie)

$x_M = \cos\theta_M \cos\varphi_M$

$y_M = cos\ \theta_M \sin\varphi_M$ formules (2)

$z_M = \sin\theta_M$

On substitue dans les formules (2) les formules (1)

Et on admet (formule de cours de l'enseignement supérieur) demandée à un « expert »

Que la longueur de l'arc paramétré $\widehat{AB}$ est :

$$\widehat{AB} = \int_0^1 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t)^2 + z'(t)^2}dt$$

<u>Annexes</u> :Autre possibilité pour le calcul de l'orthodromie

B) Calcul de la longueur de l'orthodromie

1) Calcul de la longueur du segment AB

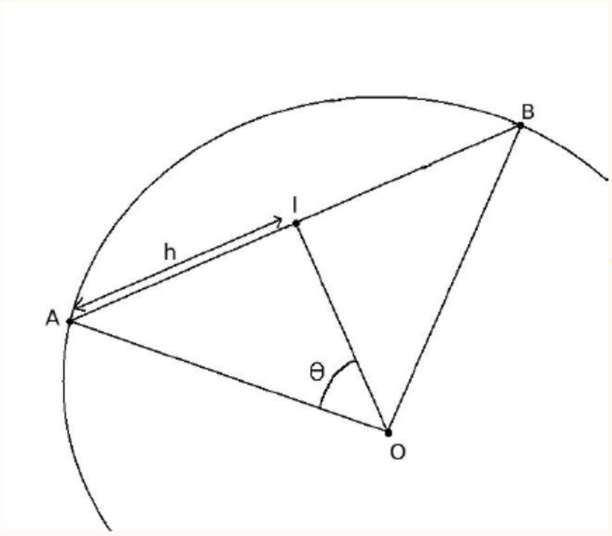
On transforme les coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes. Pour simplifier les calculs, on pose R=1. On obtient alors

xA = cos[latA]*cos[longA]
yA = -cos[latA]*sin[longA]
zA = sin[latA]
xB = cos[latB*cos[longB]
yB = -cos[latB]*sin[longB]
zB = sin[latB]

On peut ainsi calculer AB² : AB² = (xB - xA) ² + (yB - yA) ² + (zB - zA) ²

En développant et en simplifiant, on obtient AB² = 2 (1 - cos[latA] cos[latB] cos[longA - longB] - sin[latA] sin[latB])

2) Lien entre la longueur du segment AB et la longueur de l'arc AB



On se place dans le plan contenant le cercle par lequel passe l ' orthodromie.

On note h = AB/2 et I milieu de AB. O représente le centre de la Terre.

Ayant pris 1 pour rayon, on a donc la longueur de l' arc AB qui est égale à la moitié de l' angle au centre (AÔB).

On obtient donc longueur_arc (AB) = AÔB/2 = θ = 2 arcsin (AB/2) = 2 arcsin (h)

3)Simplification

Pour simplifier la formule ci-dessus, on utilise la relation cos 2u = 1-2 sin²(u). Ce qui donne:

Printed by Mathematica for Students