- P1-Montrer son intérêt pour un point du programme

L'élève pourra dégager l'élément ou les éléments importants qui ont retenu son attention sur un thème donné (beauté mathématique, enjeu du supérieur, enjeu de société) et poser son regard sur son parcours et son orientation.

Dans toute cette partie, on pourra poser un regard sur l'année *n+1* en se faisant aider par exemple du professeur ou d'étudiants de classes préparatoires si l'élève est scolarisé dans un lycée avec CPGE.

Thème P1-1 : **Explicitation de la méthode d'Euler** pour une équation de type $y'=f$

→ Principe de résolution avec tableur

→ Principe de résolution avec Python
Le candidat pourra expliquer l'utilisation des fonctions pour passer du cas positif au cas négatif pour l'équation $y'=y$ par exemple mais encore l'intérêt de Python pour changer aisément le pas.

→ Principe d'obtention sous GeoGebra

→ Point d'histoire (Euler puis Runge, Kutta)

→ Application à la désintégration de noyaux radioactifs.
Ce point peut être développé sous l'angle « description d'une expérience ».

→ Exemple de la chute libre d'une bille subissant une résistance proportionnelle à la vitesse, régie par l'équation différentielle (traduction de la relation fondamentale de la dynamique) $mdv/dt=-\alpha v+mg$ avec $v(0)=0$, m désignant la masse, α désignant le coefficient de frottement et g la constante de gravitation.

Dans ce dernier exemple, le candidat pourra montrer la force (simplicité de la programmation et rapidité de l'obtention de l'approximation) et la faiblesse de la méthode d'Euler (instabilité de la méthode pour un pas « trop grand », amplification des erreurs pour une équation différentielle d'ordre 2).

Thème P1-2 : Les différents champs d'intervention de l'intégrale :

→ Intégrale et primitives

L'intégrale se calculant au moyen d'une primitive OU l'intégration au service de la recherche d'une primitive.

Exemple : primitive de *ln* en procédant par intégration par parties.

Pour l'échange avec le jury, il est conseillé d'avoir à l'esprit un deuxième exemple de recherche de primitive au moyen d'une intégration par parties et d'avoir également une autre méthode pour trouver une primitive.

Exemple P1-2a : Pour x réel strictement positif,
$f(x) = 2xln(x) + 1 \; et \; F(x) = axln(x) + bx$, avec a et b réels, par identification de coefficients, trouver les valeurs de a et b pour F soit une primitive de f.

Approfondissement possible vers le supérieur : quelques transformations de fonctions afin de pouvoir les intégrer (par exemple : réduction en éléments simples d'une fonction rationnelle).

→ Intégrale et probabilités

Le candidat peut reprendre les grandes lignes de la démonstration d'une des formules pour les lois à densité.
Par exemple : l'espérance pour une loi uniforme.

→ Intégrale et aires, voire, vision de l'intégrale et volumes.

Illustration au moyen d'exemples.

→ Intégrale et récurrence

De nombreux exemples éclairent ce thème : par exemple, les intégrales de Wallis. Il s'agira de décrire les grandes étapes de calcul (calculs pour *n* égal à 0 puis 1, intégration par parties qui permet d'aboutir à la relation de récurrence liant un terme de rang *n+2* à un terme de rang *n* et enfin, expression selon la parité et hérédité). Approximation de π.

Approfondissement vers le supérieur : calcul de l'intégrale de Gauss (la formule de Stirling pourra être admise).

Le candidat pourra citer un ou deux exemples de son choix en conservant la possibilité de citer d'autres exemples lors de l'échange.

Thème P1-3 : Description d'une expérience

Exemple P1-3a : Planche de Galton

Description (historique ou personnelle) de l'expérience, simulation.
Explicitation de la loi binomiale et du triangle de Pascal sous-jacents.
Lien avec le théorème central limite et la loi des grands nombres.

Exemple P1-3b : Surréservation et optimisation du bénéfice (par exemple pour une compagnie aérienne)

Exemple P1-3c : Décroissance radioactive du Radon 220 (résolution par la méthode d'Euler)

Thème P1-4 : Méthode de résolution à l'aide du tableur et de Python

Exemple P1-4a : Étude du paradoxe de Toscane.

On jette trois dés équilibrés à six faces puis on calcule la somme des trois résultats obtenus. La somme 10 est plus fréquente que la somme 9, alors qu'il y a autant de façons d'obtenir 9 que 10.

Remarque : L'élève pourra expliquer en quoi la tournure « autant de façons d'obtenir 9 que 10 » induit en erreur et provoque le phénomène paradoxal.

Exemple P1-4b : Approximation de π avec la loi des grands nombres (méthode de Buffon)

Thème P1-5 : Réflexions sur les probabilités

Exemple P1-5a : Paradoxe de Saint-Pétersbourg (jeu de Bernoulli) :

Pourquoi, alors que mathématiquement, l'espérance de gain est infinie à un jeu, les joueurs refusent-ils de jouer tout leur argent ?

L'élève pourra s'intéresser aux solutions de Nicolas Bernoulli, de Daniel Bernoulli (professeurs de mathématiques) mais aussi de Cramer. Il pourra développer les grandes lignes du calcul de l'espérance de l'utilité du gain avec l'utilisation du logarithme décimal.

Exemple P1-5b : Méthode de Monte-Carlo, approximation de π, détermination de la superficie d'un lac.

Thème P1-6 : Femmes et Mathématiques

Travaux de femmes mathématiciennes au cours des siècles.

Thème P1-7 : Travail ou recherche sur l'infini

→ Les moments du cycle terminale où ce thème est intervenu (intervalles, limites).

→ Travail historique sur les premiers balbutiements de l'infini et sur l'évolution au cours des siècles :
Pascal (texte sur les deux infinis), Fermat, Newton, Leibniz, Cantor, Hilbert, Gödel…

→ Travail sur l'apparition du symbole infini (Wallis, origine historique de la lemniscate de Bernoulli))

→ Réflexions sur « l'espace est-il infini ? » avec citations de physiciens ou philosophes sur ce sujet.

Paradoxe d'Archytas de Tarente, approche aristotélicienne puis géométrie non euclidienne…

→ Regard posé sur les fractales.

L'élève peut exposer ses recherches sur le triangle de Sierpinski, la courbe de Peano, le flocon de Koch. L'élève pourra également faire un lien avec l'Art (Escher, Raedschelders).
Point d'Histoire sur Mandelbrot possible.

Thème P1-8 : Les asymptotes (horizontales, verticales voire obliques)

Le candidat pourra dresser les différents cas de figure et citer quelques exemples. Il est également possible de citer quelques erreurs classiques en apportant les contre-exemples adéquats.

Exemple : « une courbe de fonction ne croise pas son asymptote ».

Remarque : Prendre quelques secondes pour parler de l'étymologie du mot « asymptote » ne nuira pas à l'exposé.

Thème P1-9 : L'utilisation des suites dans les domaines économiques ou des sciences physiques ou biologiques.

Le candidat pourra citer quelques exemples.

Thème P1-10 : Fiabilité des sondages

Thème P1-11 : Exemples d'utilisation des barycentres en Mathématiques (et éventuellement en Physique)

Thème P1-12 : Bilan sur les différentes manières de prouver l'orthogonalité (entre deux vecteurs, entre une droite et un plan, entre deux droites, entre deux plans). Approche vectorielle, approche analytique.

- P2-Expliciter les obstacles didactiques rencontrés et la façon dont on a levé ces obstacles

  Cette piste est très personnelle et donne beaucoup de sens à l'expression orale. Il sera compliqué d'aller explorer Internet pour trouver un fil conducteur car seul, l'élève pourra faire le point sur un obstacle qu'il a identifié comme tel et sur les outils qu'il s'est construit pour surmonter cet obstacle.

  Nous pouvons ici lister les obstacles fréquents rencontrés chez les élèves du cycle terminale ou les sources de difficultés :

  - Comprendre la différence entre une hypothèse de récurrence et la propriété dont on veut démontrer la véracité pour tout entier naturel *n*.

  - Comprendre l'outil « intégrale »

  - Comprendre les fonctions logarithme et exponentielle qui ne s'expriment pas grâce aux fonctions usuelles (levier : renvoi aux fonctions trigonométriques)

  - Division par zéro, place du zéro dans l'histoire des mathématiques

  - Premières rencontres avec l'infini (adjectif puis symbole)

- P3-Donner les grandes étapes d’une démonstration

Thème P3-1 : Démonstration par récurrence

Les différents types de démonstrations rencontrées, importance de la première étape avec exemples et contre-exemples, celles qui utilisent l’hypothèse de récurrence aisément, celles qui nécessitent en plus la résolution d’une inéquation, celle qui utilisent une formule complexe (formule du binôme).

- **L’importance de la première étape d’initialisation**

Exemples et contre-exemples (cas pathogènes) :

Exemple P3-1a : « $\forall n \in \mathbb{N}$, P(n) = $n^2 + n + 41$ est premier ».

Cette assertion est fausse. Or, P(j) est premier pour j entier compris entre 0 et 40. Cet exemple montre qu’il n’est pas toujours aisé d’étudier l’initialisation. Ici, on arrive à « initialiser » mais la propriété n’est pas vraie.

Exemple P3-1b : « $3^{2n+4} - 2^n$ *est divisible par* 4 ».

Cette proposition est héréditaire mais il n’existe aucune valeur de *n* pour laquelle elle soit vraie. Cet exemple montre que l’étape de l’hérédité est non suffisante.

Exemple P3-1c : « $7^n + 1$ *est divisible par* 6 ».

Là encore, cette proposition est héréditaire mais n’est vraie pour aucune valeur de *n*.

Exemple P3-1d : « $\cos(n\pi) = 0$ ».

Cette proposition est héréditaire mais n’est vraie pour aucune valeur de *n*.

- **Les différents types de démonstrations d'hérédité** dont l'exposé des grandes lignes de l'une d'entre elles pourra être fait :

  → Avec le symbole Σ
  Exemple P3-1e : $\sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

  → Binôme de Newton (appel à la formule de Pascal)

  → Card *P*(E) avec construction ensembliste pour l'hérédité

  → Hérédité avec résolution d'une inéquation

  Exemple P3-1f : Pour « $n \geq 4,\ 2^n \geq n^2$ » avec l'utilisation d'une condition suffisante pour prouver l'hérédité.

- **Intersection avec d'autres parties du programme**

  Exemple P3-1g : où se mêlent récurrence et fonctions

  A- Dérivée de $x \to x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}^+$

  1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$,
     Démontrer en utilisant le raisonnement par récurrence que
     $f'(x) = nx^{n-1}$
  2) Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$,
     Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
     on a $g(x) = x^{-n}$ et $g'(x) = -nx^{-n-1}$
  3) Justifier alors le théorème : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
     Si $f(x) = x^n$ alors $f'(x) = nx^{n-1}$.
     Utiliser ce théorème pour calculer les dérivées des fonctions suivantes :
     a) $x \longmapsto x^{-3}$ b) $x \mapsto \frac{1}{x^5}$ c) $x \mapsto -\frac{2}{x^4}$

  B- Dérivée de f^n

- **La récurrence et le jeu**

Exemple P3-1h : Jeu des tours de Hanoï
On considère trois lignes verticales *A*, *B* et *C*. Le jeu consiste à amener sur la tige *C* les disques empilés sur la tige *A*. Pour cela, on utilise la tige *B* comme intermédiaire en respectant les règles suivantes :
- On ne déplace qu'un disque à la fois
- Tout disque doit être au-dessus d'un disque de diamètre supérieur.

1) Soit d_n le nombre minimal de déplacements, *n* désignant le nombre de disques. Prouver que la suite (d_n) est définie par $d_1 = 1$ et $d_{n+1} = 2d_n + 1$

2) Calculer d_2, d_3, d_4 et d_5

3) Conjecturer une expression de d_n en fonction de *n*. La démontrer par récurrence.

Remarque : Pour cette approche ludique, cet exemple s'inscrit aussi dans la piste « montrer son intérêt pour un point du programme ».

Remarque sur le thème « récurrence » précédent : ce thème constitue à lui seul plusieurs exposés possibles car il n'est pas question qu'un élève développe en cinq minutes l'intégralité de ce qui précède.

Thème P3-2 : Donner des exemples (avec preuve) de propositions vraies et de propositions fausses.

On pourra au préalable faire un exposé sur les façons de prouver qu'une phrase quantifiée universellement (ou existentiellement) est vraie ou fausse.

Exemple P3-2a : Pour tout entier naturel *n*, si $n(n^2+4)$ n'est pas divisible par 8, alors *n* est impair.

Cet exemple est propice à l'explicitation de la preuve par contraposée.

Exemple P3-2b : Pour tout entier naturel *n*, n^2-n+4 est un nombre pair.

Cet exemple est propice à l'explicitation de la démonstration par disjonction des cas mais la preuve peut également se faire directement.

Exemple P3-2c : Pour tout entier naturel *n*, n^2-n+41 est un nombre premier.

Exemple P3-2d : Une suite convergente est croissante ou décroissante.

Ces deux derniers exemples sont propices à l'utilisation de la preuve par le contre-exemple. L'avant-dernier exemple est intéressant car il montre l'éventuelle (et quand même rare il faut bien l'avouer) complexité de l'initialisation.

- P4-Raconter un point de l'Histoire des Mathématiques sur une notion donnée pour mieux réfléchir sur les enjeux de demain

Thème P4-1 : La notion de fonction au cours des siècles

Les Babyloniens, l'école pythagoricienne, Leibniz, Bernoulli, Viète, Euler, Dirichlet…

Thème P4-2 : Les différentes notations pour la dérivée (Lagrange, Newton, Leibniz)

Thème P4-3 : Différents modèles d'évolution (modèle de Malthus, de Verhulst sur la démographie).

Thème P4-4 : Histoire des probabilités avec Bernoulli (loi binomiale), Poisson (loi des grands nombres), Bienaymé et Tchebychev (inégalité éponyme)

On pourra s'appuyer sur un des points travaillés par l'un de ces mathématiciens (exemple : le jeu de paume et Bernoulli)

Thème P4-5 : Histoire du zéro

Thème P4-6 : Histoire de l'infini (naissance du calcul infinitésimal, Archimède de Syracuse, Fermat, Pascal, paradoxe du continu de Gödel, apparition de la « lemniscate de Bernoulli couchée »)

Thème P4-7 : Le nombre π d'hier à aujourd'hui (recherche des décimales, approximations)

Thème P4-8 : Intégrale de Riemann, origine historique des premières recherches d'Archimède : la détermination du centre de gravité d'une surface triangulaire, le rapport entre aire et périmètre du cercle, le volume et l'aire de la sphère, le volume de la calotte sphérique, l'aire du « segment » de parabole, délimité par celle-ci et une de ses cordes.

On peut citer quelques travaux sur le calcul infinitésimal de Fourier, Fermat, Pascal, Wallis, Newton et Leibniz puis poser un regard sur la généralisation de la notion d'intégrale de Lebesgue.

Thème P4-9 : Quelques constantes célèbres : $\sqrt{2}, \pi, \gamma, ln2, e$.

Le candidat pourra citer ou développer une « anecdote » pour l'une ou plusieurs d'entre elles.

Thème P4-10 : Apparition des logarithmes, Napier, Briggs

- P5-Réflexion sur une utilisation des Mathématiques en Physique-Chimie ou en SVT ou travail avec une autre spécialité

Thème P5-1 : Mathématiques et Physique : Primitives et équations différentielles au service :

→ d'un mouvement rectiligne (phase d'accélération et de freinage d'un TGV)

→ d'un circuit électrique

→ de la chute d'un corps avec frottement

Thème P5-2 : Mathématiques et Sciences de la Vie et de la Terre : Équation différentielle et colonie de bactéries

Thème P5-3 : Mathématiques et chimie

→ Équation différentielle et mélange gazeux

→ Équation différentielle et cinétique chimique : étude de la réaction de saponification de l'éthanoate d'éthyle (méthode d'Euler)

→ Polyèdres et cristaux naturels, formule d'Euler pour les polyèdres réguliers convexes

Thème P5-4 : De l'actualité : mathématiques et épidémies, le modèle SIR

Modèle de Kermack et Mac Kendrick

Théorème du seuil

Thème P5-5 : Mathématiques et architecture

Étude géométrique de bâtiments célèbres : Le Parthénon et ses effets d'optique, les pyramides de Gizeh, le théâtre d'Épidaure et le nombre d'or, la cité radieuse et la chapelle Notre-Dame-du-Haut de Ronchamp du Corbusier et le nombre d'or.

Thème P5-6 : Mathématiques et Arts

Le nombre d'or à lui tout seul constitue un élément d'étude avec les monuments cités précédemment, avec la peinture : La Joconde, La Naissance de Vénus, avec la sculpture : l'éphèbe de Polyclète mais aussi avec la musique : harmonie et rythme.

Remarque : l'élève proposant un oral sur le nombre d'or aura à connaître quelques propriétés mathématiques (algébriques et géométriques) du nombre d'or pour anticiper les questions éventuelles sur ce sujet.

Thème P5-7 : Approfondissement et Histoire:

Pierre François Verhulst et l'étude d'une population évoluant en milieu fermé (équation logistique, modèle de Verhulst)

Pour ces différents thèmes, on rappellera les lois physiques intervenant, on décrira le type d'équation différentielle obtenue puis on en précisera la solution générale. On s'interrogera sur la détermination de la constante.