Grand oral

Étude de la convergence de la méthode de Héron.

Question :

Pourquoi la méthode de Héron permet d'obtenir rapidement une approximation de la racine carrée d'un nombre positif A ?

Situation déclenchante :
Sujet riche qui mêle histoire, culture, et qui fait intervenir de nombreux éléments du programme à tous les niveaux ; le sujet permet d'aborder différents types de démonstration : raisonnement par l'absurde, récurrence, raisonnement déductif,…
La situation déclenchante est liée à la richesse du problème historique qui mêle la géométrie et l'analyse et débouche sur des programmes en Python. De nombreux approfondissements sont possibles.

- Comprendre que les nombres réels, tels que nous les connaissons, sont issus d'un processus lent.
- Évoquer la découverte de l'irrationnalité de certains nombres comme la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 (raisonnement par l'absurde).
- Expliquer d'où vient la formule de récurrence de la suite.
- Établir la preuve de la convergence de la méthode de Héron.
- Programmer en Python pour approcher, à une précision souhaitée, la racine carrée d'un nombre positif.
- Approfondir en parlant de la vitesse de convergence de la suite. La comparer avec une autre méthode : dichotomie par exemple.
- Approfondir en montrant que la méthode de Héron est un cas particulier de la méthode de Newton et de la méthode de la tangente.

L'élève peut avoir rencontré ce problème à différents niveaux de sa scolarité. Il peut alors justifier pourquoi ce thème l'a intéressé(e).

Sensibilisation de ce problème en seconde :
Construction d'un rectangle d'aire 2. Par exemple rectangle de longueur 2 et de largeur 1. Puis on construit un nouveau rectangle d'aire 2 en prenant comme longueur la moyenne arithmétique de 2 et de 1. On obtient un nouveau rectangle de longueur 3/2 et de largeur 4/3. On réitère l'opération. C'est un entraînement un peu technique qui permet de s'entraîner sur des calculs fractionnaires. Très rapidement, on approche la racine carrée de 2 par des fractions avec une précision qui dépasse celle affichée par la calculatrice !
Avec les nouveaux programmes, on peut démontrer l'irrationnalité de la racine carrée de 2 dès la seconde. Vient alors un débat sur les limites de la calculatrice. On réfléchit alors sur la notion de valeur exacte, de valeur approchée, etc…
Le fait d'itérer le même procédé incite à effectuer des programmes en python ou à utiliser un tableur.

Problème qui peut aussi être étudié en première et en terminale : Reprise du travail réalisé en seconde ; on comprend vite l'intérêt de numéroter les étapes et de distinguer les différentes longueurs ; on obtient donc une suite de valeurs (longueurs) dotées d'une notation indicielle.
On travaille alors sur la notion de suites récurrentes. Ici : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec la fonction f :

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right)$$

L’élève peut expliquer ce qui a été réalisé en classe mais que des approfondissements ont été laissés en suspens : programmation en Python avec un aspect graphique, convergence quadratique, lien avec la méthode de Newton etc. L’élève pourrait expliquer alors qu’il a voulu en savoir plus et s’est mis à faire des recherches.

<u>Trace écrite à laisser au jury après les 20 minutes de préparation :</u>

<u>Le plan</u>

<u>Obstacles didactiques rencontrés et façon dont on les a surmontés</u>

La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \geq \sqrt{A} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right) \end{cases}$, où $A \in]0; +\infty[$ converge vers $\sqrt{A}$.

- La suite définie ci-dessus est souvent donnée mais sans justification ; on peut donc expliquer d’où vient la formule par une approche géométrique.
- Pourquoi la suite ainsi définie converge-t-elle ? Vers quelle limite ?
- Pourquoi la suite (u_n) converge rapidement (convergence quadratique).

<u>Grandes étapes de la démonstration</u>

- Stricte croissance sur $[\sqrt{A}; +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{A}{x}\right)$.
  Continuité de f sur $[\sqrt{A}; +\infty[$.
- Minoration de la suite (u_n) par $\sqrt{A}$ (raisonnement par récurrence).
- Décroissance de la suite (u_n).
- Théorème de convergence des suites monotones.
- Détermination de la limite de la suite (u_n) utilisant la continuité de la fonction f.
- Prolongement possible : la convergence quadratique de la suite (u_n). Comparaison de la vitesse de convergence avec, par exemple, la méthode de dichotomie.
- Lien avec la méthode de Newton : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, avec $f(x) = x^2 - A$.

Une démonstration significative : par exemple la convergence quadratique.

$$u_{n+1} - \sqrt{A} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right) - \sqrt{A}$$
$$u_{n+1} - \sqrt{A} = \frac{1}{2u_n}\left[u_n^2 - 2\sqrt{A} + A\right]$$
$$u_{n+1} - \sqrt{A} = \frac{1}{2u_n}\left(u_n - \sqrt{A}\right)^2$$

Si $A \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1 \; et \; u_{n+1} - \sqrt{A} \leq \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{A}\right)^2$

Ainsi, si à l’étape n, $u_n - \sqrt{A} \leq 10^{-n}$ alors à l’étape suivante : $u_{n+1} - \sqrt{A} \leq 10^{-2n}$.

<u>Prolongement et mise en perspective avec le projet d'orientation :</u>

Ce type de thème peut intéresser les élèves qui s’orientent vers des classes préparatoires où les mathématiques sont une matière dominante. Le sujet peut aussi intéresser les futurs profs de Maths. Plus généralement, répondre à cette question permet de faire des liens et donner du sens à l'ensemble des chapitres étudiés. Ce travail participe à la construction d'un savoir et d'une culture scientifique.

Quelques éléments bibliographiques qui peuvent aider :
https://www.irem.univ-mrs.fr/IMG/pdf/BabyloneV2-2.pdf
https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_H%C3%A9ron
http://mediamaths.over-blog.com/article-web-et-mathematiques-babyloniennes-45144085.html

Mais aussi et surtout ! De André Seguin IREM de la Réunion
https://maths.discip.ac-caen.fr/spip.php?article466
https://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/methode_heron.pdf

Et d'Alain Busser
https://irem.univ-reunion.fr/spip.php?article531