Terminale STI2D -STL

Spécialité Mathématiques-Physique

Activité : Thème 1 Energie

Nombre complexe

Puissance en régime sinusoïdal

Rappel programme Mathématiques-Physique

Partie du programme de Mathématiques

- Écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme $r\,e^{i\theta}$ avec $r > 0$
- Formules d'addition et de duplication des sinus et des cosinus.

Partie du programme de Physique

Le régime sinusoïdal. Puissance active et puissance apparente.	- Indiquer que la puissance apparente S, égale au produit des valeurs efficaces de la tension et de l'intensité du courant, est une grandeur de dimensionnement d'une installation ou d'un équipement électrique. - Indiquer que la puissance active P est égale à la puissance moyenne mise en jeu par une installation ou d'un équipement électrique. - *Mesurer une puissance active P et apparente S en régime sinusoïdal.* - *Utiliser un outil numérique (tableur, logiciel ou programme informatique) pour calculer la valeur de la puissance active d'un système à partir des évolutions temporelles de la tension et de l'intensité du courant.* - Calculer le facteur de puissance $k = P/S$ d'un récepteur en régime sinusoïdal.

Proposer une activité permettant la détermination de puissance moyenne de dipôles en s'aidant de la notation complexe et indiquant l'intérêt du facteur de puissance.

Énergie électrique : régime permanent sinusoïdal

Définition ► Rappels

En physique le nombre complexe j est tel que $j^2 = -1$.Tout nombre complexe z peut s'écrire sous trois formes :

- La forme algébrique : $z = a + jb$, où a et b sont des nombres réels.
- La forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$, avec $\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$.
- La forme exponentielle : $z = \rho e^{j\theta}$.

Quelques formules utiles pour l'activité de recherche :

- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

Propriété ► Passage de $u(t)$ et $i(t)$ à la représentation complexe

Un circuit est alimenté par une source de tension ou de courant sinusoïdal. Les tensions et les courants en tous points du circuit sont aussi sinusoïdaux avec la même période que celle de la source.
Ainsi, si le circuit est alimenté par un générateur délivrant une tension $u(t) = U_0\cos(\omega t)$, un courant $i(t)$ circulant dans une branche du circuit s'écrira $i(t) = I_0\cos(\omega t + \phi)$, où :

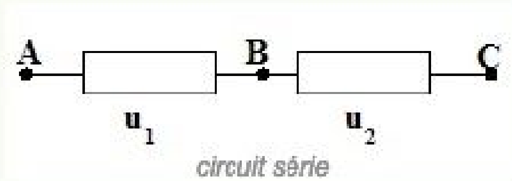
- I_0 est l'amplitude de $i(t)$;
- ω est la pulsation liée à la fréquence F définie par $\omega = 2\pi F$;
- ϕ est le déphasage de $i(t)$ par rapport à $u(t)$.

Passage de $u(t)$ et $i(t)$ à la représentation complexe :

- $u(t) = U_0\cos(\omega t + \phi_U) \Rightarrow \underline{U} = U_0 \times e^{j(\omega t + \phi_U)} = U_0 \times e^{j\phi_U} \times e^{j\omega t}$.
- $i(t) = I_0\cos(\omega t + \phi_I) \Rightarrow \underline{I} = I_0 \times e^{j(\omega t + \phi_I)} = I_0 \times e^{j\phi_I} \times e^{j\omega t}$.

Recherche

On considère un circuit électrique alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence 0,5.



On donne $\begin{cases} u_1 = -4\sin(\pi t) \\ u_2 = \cos(\pi t) - sin\pi t \end{cases}$.

1. a) Établir que $u_1(t)$ peut s'écrire sous la forme $u_1(t) = U_1\cos(\pi t + \phi_1)$, avec $U_1 = 4$ et $\phi_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

   b) Établir que $u_2(t)$ peut s'écrire sous la forme $u_2(t) = U_2\cos(\pi t + \phi_2)$, avec $U_2 = \sqrt{2}$ et $\phi_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Déterminer les représentations complexes respectives $\underline{U_1}$ et $\underline{U_2}$ de $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

   La loi des mailles dans le circuit permet d'écrire $\underline{U} = \underline{U_1} + \underline{U_2}$ (E_1).
   On sait que $\underline{U}$ peut s'écrire sous la forme : $\underline{U} = U\,e^{j\phi}\,e^{j\pi t}$ (E_2).

3. a) En vous aidant des égalités (E_1) et (E_2), justifier que $U\,e^{j\phi} = U_1\,e^{j\phi_1} + U_2\,e^{j\phi_2}$.

b) En mettant à égalité les parties réelles et imaginaires entre les deux membres de l'égalité précédente établir que : $\begin{cases} U\,\cos\phi = U_1\,\cos\phi_1 + U_2\,\cos\phi_2 & (L_1) \\ U\,\sin\phi = U_1\,\sin\phi_1 + U_2\,\sin\phi_2 & (L_2) \end{cases}$.

c) En effectuant le quotient des lignes (L_1) et (L_2) du système précédent, établir que :

$$\tan\phi = \frac{U_1\,\sin\phi_1 + U_2\,\sin\phi_2}{U_1\,\cos\phi_1 + U_2\,\cos\phi_2}$$

d) En élevant au carré chacune des lignes (L_1) et (L_2), vérifier que $\begin{cases} U^2\,\cos^2\phi = U_1^2\,\cos^2\phi_1 + U_2^2\,\cos^2\phi_2 + 2U_1U_2\cos\phi_1\cos\phi_2 & (L_1^2) \\ U^2\,\sin^2\phi = U_1^2\,\sin^2\phi_1 + U_2^2\,\sin^2\phi_2 + 2U_1U_2\sin\phi_1\sin\phi_2 & (L_2^2) \end{cases}$.

e) En additionnant les lignes (L_1^2) et (L_2^2), établir que $U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 \times U_2\cos(\phi_1 - \phi_2)$. En déduire U.

f) En déduire $\underline{U}$, puis $u(t)$.

$\underline{Z} = Z\,e^{j\varphi}$ $\quad\quad$ $\varphi = \arg \underline{Z}$