Terminale STI2D -STL

Spécialité Mathématiques-Physique

Activité : Thème 1 Energie

Nombre complexe

Puissance en régime sinusoïdal

Puissance en régime sinusoïdal et Notation complexe

Rappel programme Mathématiques-Physique

Partie du programme de Mathématiques

- Écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme $r\,e^{i\theta}$ avec $r > 0$
- Formules d'addition et de duplication des sinus et des cosinus.

Partie du programme de Physique

Le régime sinusoïdal. Puissance active et puissance apparente.	- Indiquer que la puissance apparente S, égale au produit des valeurs efficaces de la tension et de l'intensité du courant, est une grandeur de dimensionnement d'une installation ou d'un équipement électrique. - Indiquer que la puissance active P est égale à la puissance moyenne mise en jeu par une installation ou d'un équipement électrique. - *Mesurer une puissance active P et apparente S en régime sinusoïdal.* - *Utiliser un outil numérique (tableur, logiciel ou programme informatique) pour calculer la valeur de la puissance active d'un système à partir des évolutions temporelles de la tension et de l'intensité du courant.* - Calculer le facteur de puissance $k = P/S$ d'un récepteur en régime sinusoïdal.

Exercice utilisant la notation complexe

1. **Quelle est la puissance moyenne consommée par les composants suivants, lorsqu'ils sont parcourus, en régime sinus, par un courant efficace I_{eff} ?**
   - **Une bobine**
   - **Une capacité**
   - **Une résistance**
2. **Quel est le facteur de puissance d'une installation consommant 100kW, alimentée par une tension d'amplitude 50kV et absorbant un courant d'amplitude 10A ?**
3. **A votre avis, pourquoi EDF impose-t-il un facteur de puissance >0.93 pour les installations connectées au réseau ?**

Proposition de correction

- **Rappel de Mathématiques** Voir document stagiaire en mathématiques

Énergie électrique : régime permanent sinusoïdal

Définition ► Rappels

En physique le nombre complexe j est tel que $j^2 = -1$.Tout nombre complexe z peut s'écrire sous trois formes :

- La forme algébrique : $z = a + jb$, où a et b sont des nombres réels.
- La forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + j\sin\theta)$, avec $\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$.
- La forme exponentielle : $z = \rho e^{j\theta}$.

Quelques formules utiles pour l'activité de recherche :

- $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$.
- $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$.
- $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b \cos a$.
- $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b \cos a$.

Propriété ► Passage de $u(t)$ et $i(t)$ à la représentation complexe

Un circuit est alimenté par une source de tension ou de courant sinusoïdal. Les tensions et les courants en tous points du circuit sont aussi sinusoïdaux avec la même période que celle de la source.
Ainsi, si le circuit est alimenté par un générateur délivrant une tension $u(t) = U_0\cos(\omega t)$, un courant $i(t)$ circulant dans une branche du circuit s'écrira $i(t) = I_0\cos(\omega t + \phi)$, où :

- I_0 est l'amplitude de $i(t)$;
- ω est la pulsation liée à la fréquence F définie par $\omega = 2\pi F$;
- ϕ est le déphasage de $i(t)$ par rapport à $u(t)$.

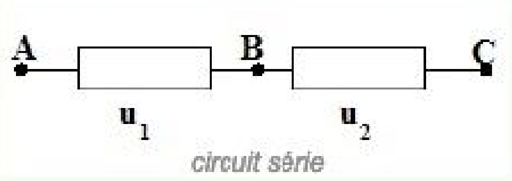
Passage de $u(t)$ et $i(t)$ à la représentation complexe :

- $u(t) = U_0\cos(\omega t + \phi_U) \Rightarrow \underline{U} = U_0 \times e^{j(\omega t + \phi_U)} = U_0 \times e^{j\phi_U} \times e^{j\omega t}$.
- $i(t) = I_0\cos(\omega t + \phi_I) \Rightarrow \underline{I} = I_0 \times e^{j(\omega t + \phi_I)} = I_0 \times e^{j\phi_I} \times e^{j\omega t}$.

Recherche

On considère un circuit électrique alimenté par une tension sinusoïdale de fréquence 0,5.

On donne $\begin{cases} u_1 = -4\sin(\pi t) \\ u_2 = \cos(\pi t) - sin\pi t \end{cases}$.



1. a) Établir que $u_1(t)$ peut s'écrire sous la forme $u_1(t) = U_1\cos(\pi t + \phi_1)$, avec $U_1 = 4$ et $\phi_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

   b) Établir que $u_2(t)$ peut s'écrire sous la forme $u_2(t) = U_2\cos(\pi t + \phi_2)$, avec $U_2 = \sqrt{2}$ et $\phi_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Déterminer les représentations complexes respectives $\underline{U_1}$ et $\underline{U_2}$ de $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

   La loi des mailles dans le circuit permet d'écrire $\underline{U} = \underline{U_1} + \underline{U_2}$ (E_1).
   On sait que $\underline{U}$ peut s'écrire sous la forme : $\underline{U} = U\, e^{j\phi}\, e^{j\pi t}$ (E_2).

3. a) En vous aidant des égalités (E_1) et (E_2), justifier que $U\,e^{j\phi} = U_1\,e^{j\phi_1} + U_2\,e^{j\phi_2}$.

b) En mettant à égalité les parties réelles et imaginaires entre les deux membres de l'égalité précédente établir que : $\begin{cases} U\,\cos\phi = U_1\,\cos\phi_1 + U_2\,\cos\phi_2 & (L_1) \\ U\,\sin\phi = U_1\,\sin\phi_1 + U_2\,\sin\phi_2 & (L_2) \end{cases}$.

c) En effectuant le quotient des lignes (L_1) et (L_2) du système précédent, établir que :

$$\tan\phi = \frac{U_1\,\sin\phi_1 + U_2\,\sin\phi_2}{U_1\,\cos\phi_1 + U_2\,\cos\phi_2}$$

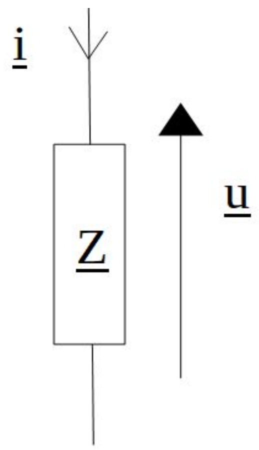
d) En élevant au carré chacune des lignes (L_1) et (L_2), vérifier que $\begin{cases} U^2\,\cos^2\phi = U_1^2\,\cos^2\phi_1 + U_2^2\,\cos^2\phi_2 + 2U_1U_2\cos\phi_1\cos\phi_2 & (L_1^2) \\ U^2\,\sin^2\phi = U_1^2\,\sin^2\phi_1 + U_2^2\,\sin^2\phi_2 + 2U_1U_2\sin\phi_1\sin\phi_2 & (L_2^2) \end{cases}$.

e) En additionnant les lignes (L_1^2) et (L_2^2), établir que $U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2U_1 \times U_2\cos(\phi_1 - \phi_2)$. En déduire U.

f) En déduire $\underline{U}$, puis $u(t)$.

$$\underline{Z} = Z\,e^{j\varphi} \qquad \varphi = \arg \underline{Z}$$

- **Ci dessous un dipôle quelconque d'impédance complexe $\underline{Z}$ alimenté par un courant**



$\underline{i} = I_0\ e^{j\omega t}$

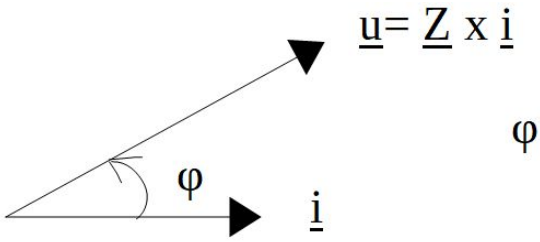
$\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i} = Z\,I_0\,e^{j(\omega t+\varphi)}$

$\Rightarrow i = I_0\cos(\omega t)$

$u = Z\,I_0\cos(\omega t + \varphi)$

$\underline{Z} = Z\,e^{j\varphi}$

Diagramme de Fresnel



$\varphi = \arg \underline{Z}$

$= \varphi_u - \varphi_i$

- **Expression de la puissance instantanée p(t) consommée par le composant**

$$p(t)=u(t) \times i(t) = Z I_0 \cos(\omega t + \varphi) \times I_0 \cos(\omega t)$$
$$= U_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) \times I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t)$$
$$= 2\ U_{eff}\ I_{eff} \cos(\omega t + \varphi) \times \cos(\omega t)$$

$2 \cos a \cos b = (\cos(a+b) + \cos(a-b))$

- $$\mathbf{p(t) = U_{eff}\ I_{eff} \cos(2\omega t + \varphi) + U_{eff}\ I_{eff} \cos(\varphi)}$$

Avec un terme variable, de fréquence double de celle de u(t) et de i(t) et un terme constant

- **Expression de la puissance moyenne consommée en fonction de Ueff, Ieff et le déphasage** φ

$$P_{moy} = < p(t) > = U_{eff}\ I_{eff} \cos \varphi$$

$\cos \varphi$ = facteur de puissance

- **Exercice**

1. Quelle est la puissance moyenne consommée par les composants suivants, lorsqu'ils sont parcourus, en régime sinus, par un courant efficace I_{eff} ?
- **Une bobine**
- **Une capacité**
- **Une résistance**

- **soit une bobine d'inductance L parcourue par un courant sinusoïdal**

Pour une bobine le courant est en retard de $\pi/2$ sur la tension


L

$i = I_{eff} \sqrt{2} \cos(\omega t)$

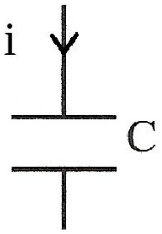
$P = U_{eff}\ I_{eff} \cos(\varphi)$

avec $\varphi = \arg \underline{Z}$ $\quad \underline{Z} = jL\omega$ $\quad \varphi = \pi/2$

P=0

La bobine va stocker de l'énergie, va la restituer …

- **un condensateur alimenté par un courant i**



$\varphi = \arg \underline{Z}$ $\underline{Z} = 1 / jc\omega$ $\varphi = -\pi/2$

$\Rightarrow \cos\varphi = 0$

P=0

le condensateur est capable de stocker de l'énergie, la restitue ....

- **une résistance**

$\underline{Z}=R$

$\varphi = 0$ $P = U_{eff}\ I_{eff}$

$u = R\,i = R\,I_{eff}\,\sqrt{2}\ \cos(\omega t) = U_{eff}\,\sqrt{2}\ \cos(\omega t)$

$\mathbf{P = R\,I_{eff}^2}$

seule la résistance consomme de la puissance moyenne

2. Quel est le facteur de puissance d'une installation consommant 100kW, alimentée par une tension d'amplitude 50kV et absorbant un courant d'amplitude 10A ?

$$\cos\varphi = \frac{P}{U_{eff}\ I_{eff}}$$

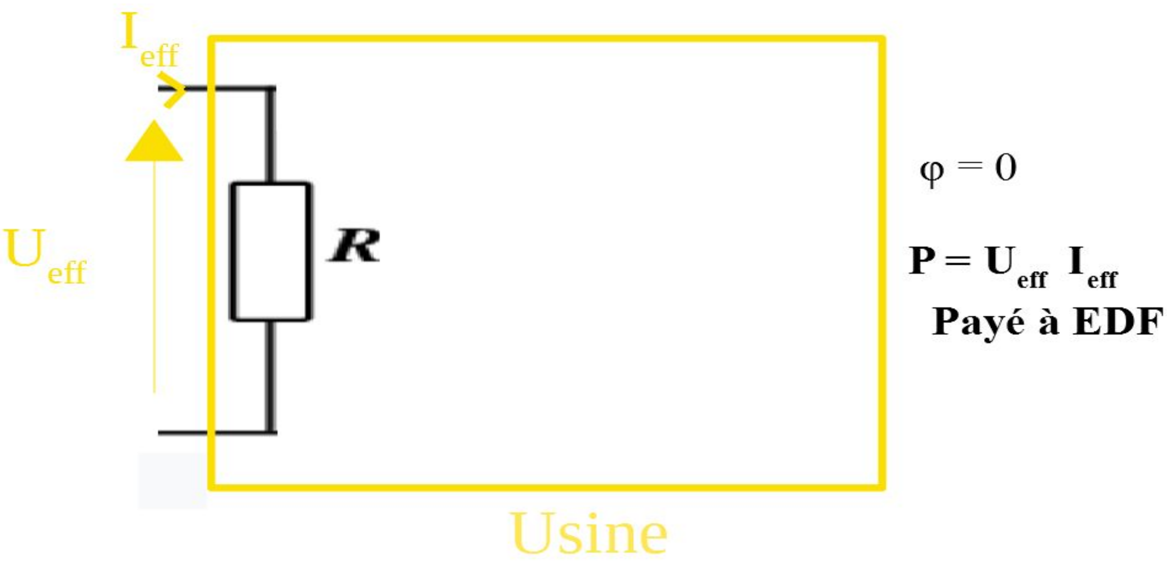
P = 100 kW

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \qquad \Rightarrow \quad \cos\phi = \frac{2P}{U_0\ I_0} = 0{,}4$$

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

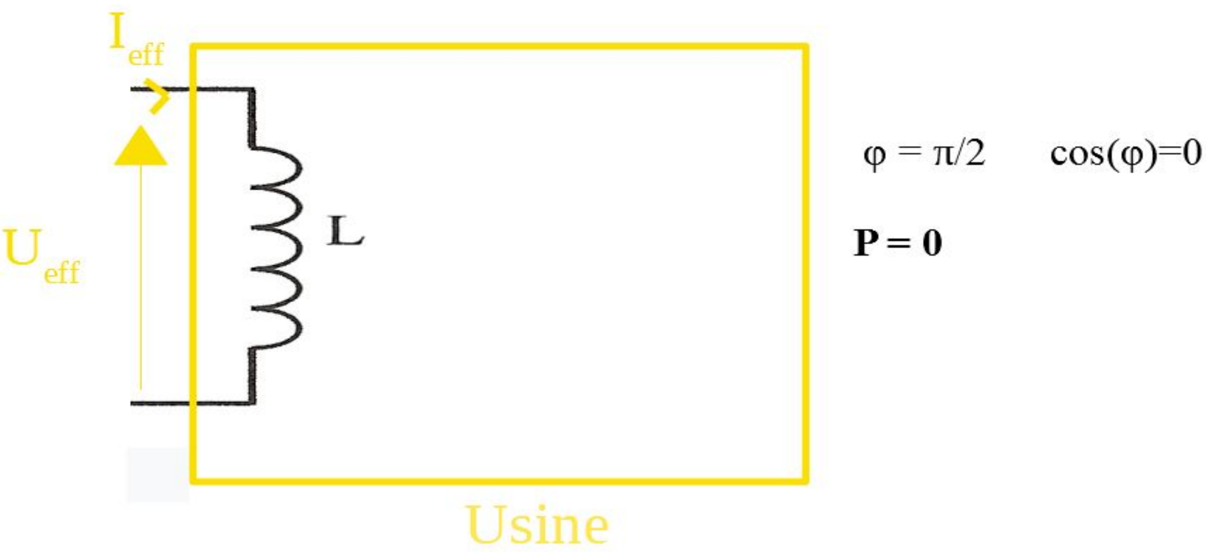
3. A votre avis, pourquoi EDF impose-t-il un facteur de puissance >0.93 pour les installations connectées au réseau ?

- considérons **une installation électrique équivalente à une résistance**, une usine connectée au réseau EDF qui va fournir à l'usine Ieff et Ueff.



C'est la puissance que consomme l'installation et payé à EDF

- soit une **usine voisine modélisable par une inductance L** et consomme même Ieff et Ueff



EDF ne touche rien, la bobine prend l'énergie et la renvoie … mais ne la consomme pas.

Mais **EDF pour faire fonctionner l'usine doit faire passer du courant sur son réseau Ieff , d'où des pertes par effet joule, on utilise le réseau EDF et on ne paye rien (pas de puissance consommée)**

Inspiré de l'activité du livre delagrave P 47 ci dessous

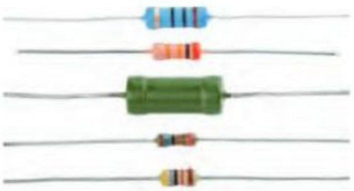
Activité 2 — Activité expérimentale TP

Mesurer des puissances en régime sinusoïdal

Capacités exigibles
- Indiquer que la puissance active P est égale à la puissance moyenne mise en jeu par une installation ou d'un équipement électrique.
- Mesurer une puissance active P et apparente S en régime sinusoïdal.
- Calculer le facteur de puissance $k = P/S$ d'un récepteur en régime sinusoïdal.

Doc. 1 Les différents dipôles

- Les **dipôles résistifs** sont composés uniquement de résistances. Ils servent principalement à réguler l'intensité du courant et à produire de la chaleur.



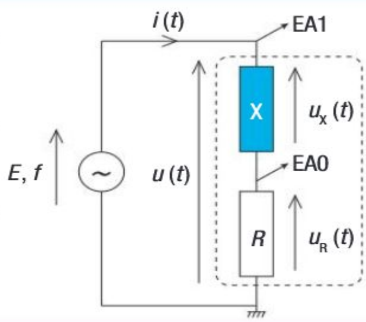
- Les **dipôles inductifs** sont composés de bobines. Ils servent principalement dans les transformateurs, les filtrages de signaux et les antennes.

- Les **dipôles capacitifs** sont composés de condensateurs. Ils servent principalement au stockage d'énergie et aux filtrages de signaux.

Doc. 2 Puissances absorbées par un dipôle

On souhaite étudier la puissance $p(t) = u(t) \times i(t)$ absorbée par la charge, selon le type de dipôles qui la constitue.

Protocole
- Réaliser le montage ci-contre avec les réglages suivants : E = 6 V, f = 50 Hz, R = 10 Ω pour différentes situations :
  - **Situation 1** : charge résistive : X est une résistance de 100 Ω.
  - **Situation 2** : charge inductive : X est une bobine d'inductance L = 36 mH et de résistance interne r = 10 Ω.
  - **Situation 3** : charge capacitive : X est un condensateur de capacité C = 33 µF.
- Réaliser les acquisitions EA0 et EA1.

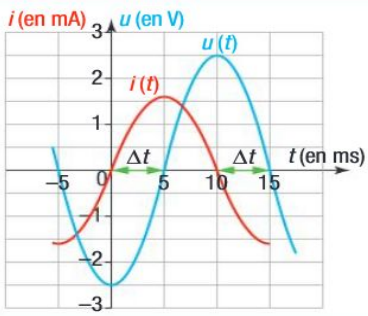


Doc. 3 Déphasage tension-courant

- Les grandeurs $u(t)$ et $i(t)$ ne passent pas nécessairement par zéro de manière simultanée : on dit qu'elles sont **déphasées**.
- On évalue le **déphasage**, noté φ, exprimé en radians, de la manière suivante :

$$\varphi = \frac{2\pi \times \Delta t}{T}$$

où T (en s) est la période de $u(t)$ et de $i(t)$.



Questions

Compétences

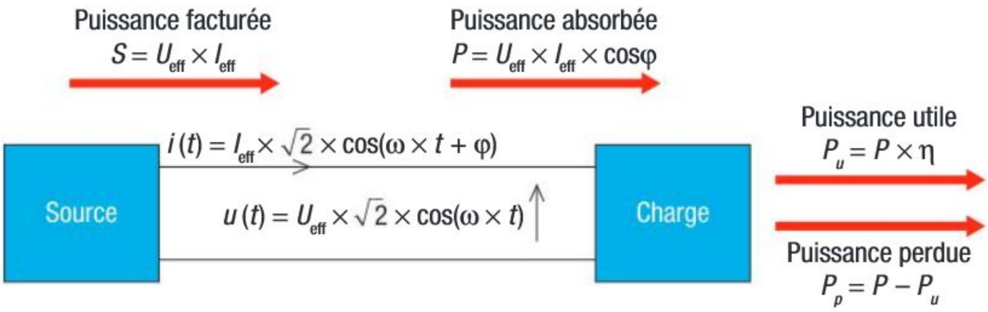
1. S'approprier — **Doc. 1 et 2** Comment peut-on visualiser $i(t)$ à partir des mesures et des données ?
2. Réaliser — **Doc. 1 et 2** Dans chaque situation, visualiser les représentations graphiques : $i(t)$, $u(t)$ et $p(t) = u(t) \times i(t)$.
3. Réaliser — **Doc. 3** Dans chaque situation, si les grandeurs $u(t)$ et $i(t)$ sont déphasées, déterminer le déphasage φ.
4. Analyser — **Doc. 1 et 2** À l'aide des outils numériques du logiciel, déterminer, dans chaque situation, la valeur moyenne de la puissance absorbée $p(t)$. Comparer la valeur obtenue au produit $U_{eff} \times I_{eff} \times \cos\varphi$. Cette puissance est nommée puissance active.
5. Analyser — **Doc. 1 et 2** Dans chaque situation, calculer la puissance apparente $S = U_{eff} \times I_{eff}$. Cette puissance s'exprime en voltampère VA. Cette puissance est-elle égale à la puissance moyenne absorbée par la charge ? En déduire le facteur de puissance de la charge $k = P/S$. À quoi est égal k ?

- On appelle **puissance apparente**, noté S, exprimée en voltampère VA, le produit : $S = U_{eff} \times I_{eff}$.
- On appelle **facteur de puissance** le rapport $k = \dfrac{P}{S} = \cos\varphi$.

Le facteur de puissance est sans unité.

- La puissance apparente est définie comme étant la valeur maximale qui peut être prise par la puissance active. Elle correspond à la puissance absorbée si la charge était purement résistive.
- Cette grandeur sert à dimensionner une installation ou un équipement électrique. En effet, quel que soit le facteur de puissance, le fournisseur d'électricité doit fournir le courant I_{eff}. Or plus celui-ci est important, plus la section du câble d'alimentation doit être grande

▲ Le compteur d'électricité domestique mesure la puissance apparente S (en VA), et non la puissance moyenne utilisée (en W).



Compléments mathématiques

- **Expression de la puissance instantanée**

Si $u(t) = U_{eff} \times \sqrt{2} \times \cos(\omega \times t)$ et $i(t) = I_{eff} \times \sqrt{2} \times \cos(\omega \times t + \varphi)$, alors :

$$p(t) = u(t) \times i(t) = 2 \times U_{eff} \times I_{eff} \times \cos(\omega \times t) \times \cos(\omega \times t + \varphi)$$

Or $\cos a \times \cos b = \dfrac{1}{2} \times (\cos(a-b) + \cos(a+b))$ et $\cos(-b) = \cos b$.

Donc : $p(t) = u(t) \times i(t) = 2 \times U_{eff} \times I_{eff} \times \dfrac{1}{2} \times (\cos\varphi + \cos(2\omega \times t + \varphi))$.

Soit :

$$p(t) = \underbrace{\boxed{U_{eff} \times I_{eff} \times \cos\varphi}}_{\text{Terme constant qui représente la puissance moyenne consommée par la charge}} + \underbrace{\boxed{U_{eff} \times I_{eff} \times \cos(2\omega \times t + \varphi)}}_{\text{Terme variable, de moyenne nulle et de fréquence double de celle de } u(t) \text{ et de } i(t)}$$

- **Représentation complexe des grandeurs électriques**

En régime sinusoïdal, on utilise parfois les nombres complexes pour simplifier les calculs.

Ainsi, à un signal sinusoïdal $x(t) = X_{max} \times \cos(\omega \times t + \varphi)$, on associe la grandeur complexe :

$$\underline{x} = X_{max} \times e^{j \times (\omega \times t + \varphi)}$$

étant entendu que :

- $x(t)$ correspond à la partie réelle du complexe : $x(t) = \mathrm{Re}(\underline{x})$;
- l'amplitude du signal correspond au module du nombre complexe $\underline{x}$: $X_{max} = |\underline{x}|$;
- la phase instantanée correspond à l'argument du nombre complexe $\underline{x}$: $\omega \times t + \varphi = \arg(\underline{x})$.