Extrait de Hachette 2019 page 104

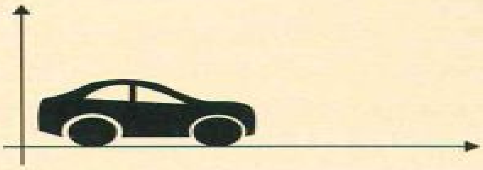
EXERCICE RÉSOLU

Voiture

Focus Maths

▶ Fonctions dérivées.

Une voiture se déplace en ligne droite. On repère sa position x en fonction du temps par la relation $x(t) = 1{,}2 \cdot t^2 + 10 \cdot t$, avec x position de la voiture en mètres, et t le temps en secondes.



1. Quelle est sa position à $t = 0$ s ? À $t = 10$ s ?
2. Calculer la vitesse moyenne de la voiture pendant les dix premières secondes.
3. Déterminer l'expression de la vitesse de la voiture en fonction du temps. La calculer à $t = 0$ s et à $t = 10$ s.
4. Calculer l'accélération moyenne de la voiture pendant les dix premières secondes.
5. Déterminer l'expression de l'accélération en fonction du temps.
6. Décrire le mouvement de la voiture. Justifier.

Méthode de résolution

A) Analyser les données du problème.
B) Se rappeler et réécrire toutes les relations qui lient le temps, la position, la vitesse, et l'accélération.
C) Cet exercice contient une expression mathématique qu'il va falloir dériver. Revoir le cours de mathématiques sur les fonctions dérivées.

Extrait de Hachette 2019 page 262

COMMENT FAIRE ? FICHE MÉTHODE

X. La dérivation

À quoi ça sert ?

- Certaines quantités peuvent augmenter, diminuer ou demeurer constantes. En physique, on a besoin d'estimer leurs variations. Cela permet d'analyser, de comprendre, et aussi de calculer d'autres données.
- Par exemple, lorsqu'il s'agit d'une vitesse, on parle d'accélération, de décélération, ou de vitesse constante.

Qu'est-ce que c'est ?

Nombre dérivé et fonction dérivée

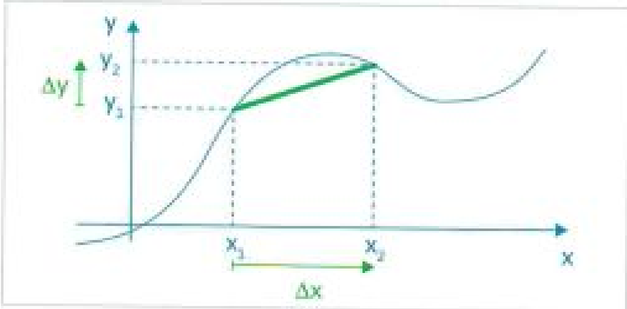
- Le **nombre dérivé** est la pente de la courbe représentative d'une fonction en un point précis : $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ au point x_0.
- La **fonction dérivée** f' est la fonction qui modélise la pente de la courbe représentative d'une fonction f en tous les points de son intervalle de dérivabilité.

Comment calculer un nombre dérivé graphiquement ?

- On peut **déterminer une pente graphiquement**. On utilise la relation

$$\text{pente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

- **Problème** : si la courbe représentative n'est pas une droite, ce calcul n'est pas précis du tout. Sur le graphe ci-contre, la pente calculée correspond à la portion en vert. Elle « n'adhère » pas du tout à la courbe !

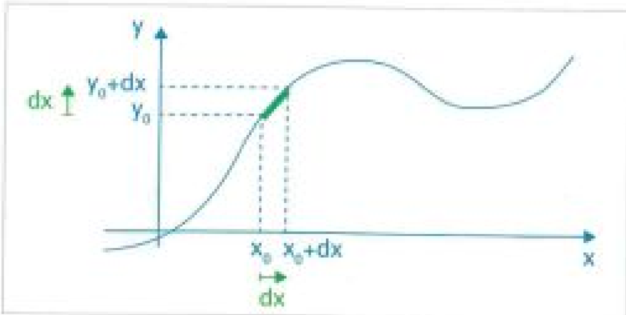


Comment calculer un nombre dérivé plus précisément ?

→ **Solution** : pour avoir un maximum de précision, on essaye de réduire au maximum l'étendue de l'intervalle entre x_1 et x_2.

On essaye de faire en sorte que Δx soit si petit qu'il soit très proche de zéro. On le note alors d*x*.

Sur le graphe ci-contre, on voit bien que la portion en vert correspondant à la pente adhère beaucoup mieux à la courbe.



Extrait de Hachette 2019 page 263

FICHE MÉTHODE

COMMENT FAIRE ?

Les notations

En mathématiques

Soit f une fonction définie sur un intervalle Df. Cette fonction est dérivable sur l'intervalle Df', et f' est sa fonction dérivée sur Df' avec

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En physique-chimie

En physique-chimie, au lieu d'écrire simplement $f'(x)$ avec un prime comme en mathématiques, on utilise parfois d'autres notations, car elles sont plus pratiques et plus adaptées. C'est à vous de choisir selon le contexte.

Notation différentielle

- Très utilisée en mécanique, entre autres. Par exemple, lorsqu'un solide est en mouvement sur un axe horizontal, on note $x(t)$ sa position en fonction du temps t. La fonction position x est dérivable par rapport au temps, et sa dérivée se nomme vitesse v.
- Plutôt que d'écrire $v(t) = x'(t)$ comme en mathématiques, en physique, on écrit :

$$v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$$

car cette notation permet de faire « apparaître » un intervalle de positions dx et un intervalle de temps dt dans l'expression. Elle est donc plus proche de la réalité physique.

Notation pointée $\dot{x}$

- Très utilisée en mécanique et en chimie des solutions, entre autres, pour écrire les équations différentielles.
- Cette notation est simplement plus légère et plus aisée à manipuler lorsqu'il y a plusieurs degrés de dérivation dans la même équation.

Exemple : lorsqu'on écrit en mécanique une équation liant :
- la position d'un objet (fonction, x),
- sa vitesse (fonction dérivée, $\dot{x}$),
- son accélération (dérivée seconde, $\ddot{x}$).

→ Voir votre programme de terminale pour plus de précision ...

Quelques dérivées usuelles

Expression de $x(t)$	Expression de $x'(t)$
$x(t)$ = constante	$x'(t) = 0$
$x(t) = a \cdot t$ (avec a = constante)	$x'(t) = a$
$x(t) = t^2$	$x'(t) = 2 \cdot t$
$x(t) = a \cdot t^2$	$x'(t) = 2 \cdot a \cdot t$
$x(t) = n(t) + m(t)$	$x'(t) = n'(t) + m'(t)$
$x(t) = a \cdot n(t)$ (avec a = constante)	$x'(t) = a \cdot n'(t)$