Première STI2D -STL

Spécialité Mathématiques-Physique

Activité : Thème 1 Energie

Activité :
Dérivées - Mouvement Vitesse Accélération

Partie du programme de mathématiques :

- **Dérivées**

Contenus

Point de vue local

– Notations : $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x_0}$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $f'(x_0)$.

– Approximation affine d'une fonction au voisinage d'un point.

Point de vue global

Calcul des dérivées :

– d'une somme, d'un produit, de l'inverse, d'un quotient ;

– de $x \mapsto x^n$ pour n entier naturel non nul ; $x \mapsto \frac{1}{x}$;

– d'un polynôme ;

– des fonctions cosinus et sinus ;

– de $x \mapsto f(ax+b)$, $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$.

Capacités attendues

– Utiliser les différentes notations du taux de variation et du nombre dérivé en un point.

– Effectuer des calculs approchés à l'aide de l'approximation affine en un point.

– Calculer une fonction dérivée.

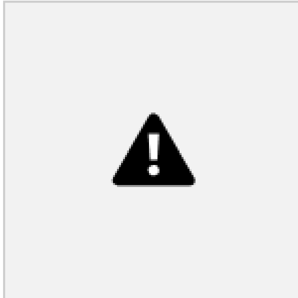
– Étudier le sens de variation d'une fonction.

Partie du programme de Physique:

Notions et contenu	Capacités exigibles / *Activités expérimentales*
Référentiels et trajectoires. Notion de solide. Mouvement de translation d'un solide.	- Choisir un référentiel et caractériser un mouvement par rapport à celui-ci. - Distinguer différents types de translation. - Comparer les trajectoires des différents points d'un solide en translation. - Assimiler le mouvement d'un solide en translation à celui d'un point matériel (centre de masse) concentrant toute sa masse.
Mouvement rectiligne : vitesse moyenne. Vitesse. Accélération.	- Écrire et exploiter la relation entre distance parcourue, durée du parcours et vitesse moyenne pour un point en mouvement rectiligne. - Dans le cas d'un mouvement rectiligne, définir la vitesse comme la limite de la vitesse moyenne pour un intervalle de temps infiniment petit. - Dans le cas d'un mouvement rectiligne, définir la vitesse comme la dérivée par rapport au temps de la position $x(t)$ et l'accélération comme la dérivée par rapport au temps de la vitesse. - *Mesurer des vitesses et accélérations dans le cas d'un mouvement rectiligne.*

La dérivation : point méthode

Certaines quantités peuvent augmenter, diminuer ou rester constantes. Par exemple, lorsqu'une vitesse varie, on parle d'accélération, qui peut être :

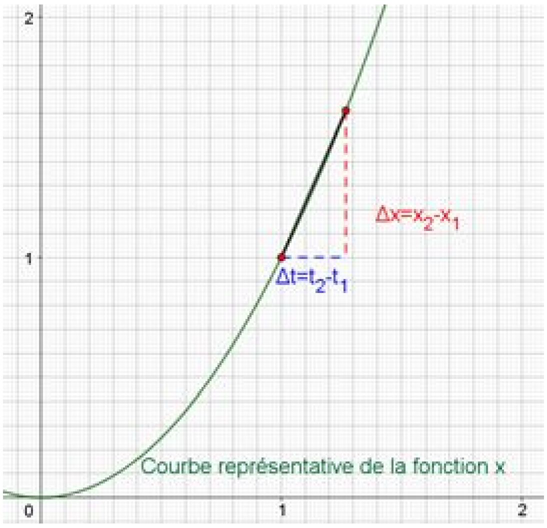


- positive,
- négative,
- ou nulle

Pour estimer les variations de ces grandeurs, on utilise la **dérivation**.

I. Nombre dérivé d'une fonction

Prenons pour exemple comme grandeur une fonction *x*, qui dépend d'une variable *t* .



On s'intéresse à la variation de x lorsque t varie.

- La variation de t est : $\Delta t = t_2 - t_1$
- La variation de x est : $\Delta x = x_2 - x_1$

Le **taux de variation** est : $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$, c'est le coefficient directeur du segment noir.

Dans cet exemple, au point $t_0 = 1$, il vaut $\frac{1{,}43-1}{1{,}2-1} \approx 2{,}2$.

Pour d'autres exemples, scanne le QR code ci-contre.

Lorsque la variation de t est infiniment petite, Δt est **très proche** de 0 : on la note dt. De même, la variation de x est notée dx. Le segment noir se superpose de mieux en mieux avec la courbe verte. Il se confond avec la tangente à la courbe en ce point.

Le coefficient directeur est alors appelé **nombre dérivé de la fonction x au point x_0 :**

$$\boldsymbol{x'(t_0) = \frac{dx}{dt}(t_0).}$$

On appelle **fonction dérivée de x**, la fonction notée x', qui, à chaque valeur possible de t_0, fait correspondre le nombre $x'(t_0)$.

On calcule les fonctions dérivées à partir de fonctions usuelles :

$x(t)$	Fonction dérivée x'
$x(t) = \text{constante}$	$x'(t) = 0$
$x(t) = a.x$ *a étant un nombre réel*	$x'(t) = a$
$x(t) = t^2$	$x'(t) = 2t$
$x(t) = n(t) + m(t)$	$x'(t) = n'(t) + m'(t)$
$x(t) = a.n(t)$	$x'(t) = a.n'(t)$

Exercices

Exercice 1

f est la fonction définie par $f(x) = x^2 + 2x$.
Calculer le taux de variation de f :

a) entre 1 et 3

b) entre – 5 et 5

Exercice 2

Calculer les fonctions dérivées dans chacun des cas :

1-

a) $f(x) = 3$ **b)** $g(x) = 6x - 5$

2-

a) $f(x) = -2x^2 - 3x$ **b)** $g(x) = x + x^2 + 7$

3-

a) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 + 3x$

b) $g(x) = -x^3 - x^2 + 5x + 10$

1ere STI2D Thème 1 Energie - Vitesse – Accélération - Fonction dérivée

Une voiture se déplace en ligne droite sur une route horizontale.
On repère sa position horizontale x, en utilisant un repère (O,x) , le point O étant lié au sol, comme indiqué sur la figure ci-contre. (Source Hachette 2019)

L'association de ce repère et de ce point matériel, constitue un référentiel, supposé Galiléen.
Dans ce référentiel galiléen, x désigne la position de la voiture (en m), à l'instant t (en s).
On donne la relation $x(t) = 1,5.t^2 + 10.t$

1. Dans ce repère, quelle est la position de la voiture à l'instant t = 0 s puis t = 5 s ?
2. Dans ce repère, donner l'expression littérale de la vitesse moyenne V_{moy} de la voiture entre 0 et 5 s.
3. Calculer la valeur de cette vitesse moyenne entre 0 et 5 s .
4. Donner l'expression littérale de la vitesse de la voiture $v_x(t)$?
5. En déduire la valeur de cette vitesse à l'instant t = 0 s.
6. Même question à l'instant t = 5 s.

7. Dans ce repère, donner l'expression littérale de l'accélération moyenne a_{moy} de la voiture entre 0 et 5 s.
8. Calculer la valeur de cette accélération moyenne entre 0 et 5 s .
9. Donner l'expression littérale de l'accélération de la voiture a_x ?
10. En déduire la valeur de cette accélération à l'instant t = 0s.

    Même question à l'instant t = 5s.
11. Caractériser le mouvement de la voiture en justifiant votre réponse.

<u>Conseils pour la résolution :</u>

1. Identifier les mots clés : position, vitesse, accélération.
2. Se remémorer et réécrire les relations liant, le temps, la position, la vitesse et l'accélération.
3. Revoir le cours de mathématique voire la fiche "méthodes" mathématique

<u>Eléments de correction</u>

1. La position de la voiture à l'instant t = 0 s est $x(0) = 1,5*0^2+10*0 \Rightarrow x(0) = 0$ m

   à t = 5,0 s est $x(5) = 1,5*5^2+10*5 \Rightarrow x(5)= 87,5$ m
2. Expression de la vitesse moyenne $$V_{moy} = \frac{\text{distance}}{\text{durée}} = \frac{[x(5) - x(0)]}{(5-0)}$$
3. Valeur de la vitesse moyenne V_{moy} = 87,5 m/5 s = 17,5 $m.s^{-1}$ = 63 $km.h^{-1}$
4. Expression de la vitesse de la voiture dans le référentiel (O, x) est :

$$v_x(\mathrm{t}) = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = 2*1,5*t+10 \rightarrow v_x(\mathrm{t}) = 3*t+10$$

5. Cette vitesse à l'instant t = 0s vaut

$$v_x(0) = 3*0+10 = 10\, m.s^{-1}$$

6. Même question à l'instant t = 5s.

$$v_x(5) = 3*5+10 = 25\, m.s^{-1}$$

7. Dans ce repère, donner l'expression littérale de l'accélération moyenne a_{moy} de la voiture entre 0 et 5 s.

$$a_{moy} = \frac{[v_x(5) - v_x(0)]}{(5-0)}$$

8. Calculer la valeur de cette accélération moyenne entre 0 et 5 s.

$$a_{moy} = \frac{[v_x(5) - v_x(0)]}{(5-0)} = \frac{[25-10]}{(5-0)} = 3\, m.s^{-2}$$

9. Donner l'expression littérale de l'accélération de la voiture a_x(t) ?

$$a_x(\mathrm{t}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}v_X}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(3 * t + 10) = 3\, m.s^{-2} = C^{ste}$$

10. En déduire la valeur de cette accélération à l'instant t = 0 s puis t = 5 s.

a_x(t) est constante donc $a_x(0) = a_x(5) = 3m.s^{-2}$

11. Caractériser le mouvement de la voiture en justifiant votre réponse.

Le mouvement de la voiture est rectiligne uniformément accéléré, car il est rectiligne et la valeur de son accélération est constante. Comme l'accélération est positive, sa vitesse est donc croissante au cours du temps.

<u>Remarque:</u> en physique quand on parle d'accélération , on peut aussi sous entendre accélération négative, c'est-à-dire décélération, la vitesse serait alors décroissante au cours du temps.

Vitesse moyenne : https://www.geogebra.org/m/UqshNPyn#material/QnMH8rQr

MRU: https://www.geogebra.org/m/UqshNPyn#material/skW6nhK2