



Mars 2016

# L'activité mathématique et la résolution de problèmes

Marie-Lise PELTIER

Maître de conférences en didactique des mathématiques



Laboratoire de didactique André Revuz  
Université Paris 7 Denis Diderot  
Collections Opération Maths  
M.A.T.H.  
Euro Maths  
et Mosaïque Calcul mental (Ed. Hatier)



# Équipe Opération Maths



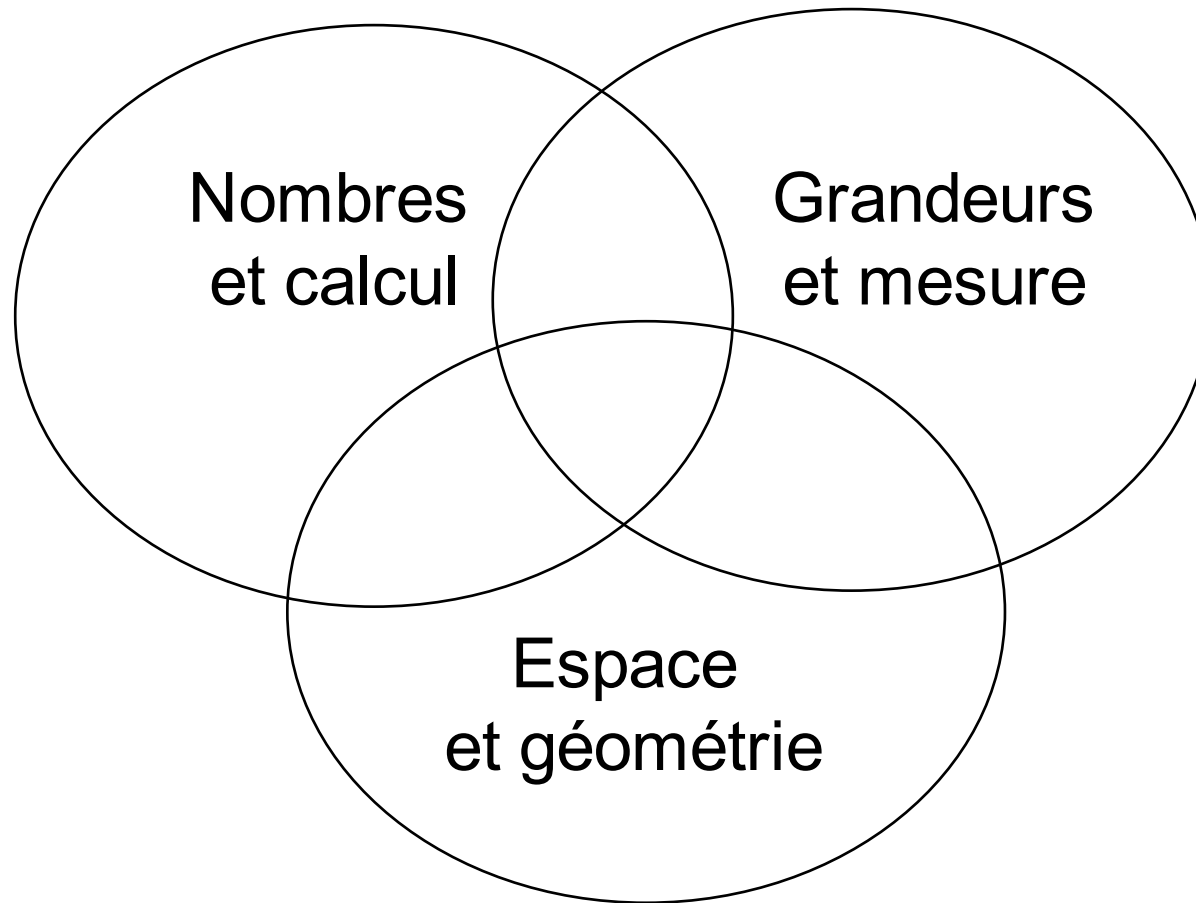
- Marie-Lise Peltier, Laboratoire LDAR Université Paris Diderot
- Joël Briand, laboratoire DAEST Université Bordeaux 2
- Bernadette Ngonu, Laboratoire CIVIIC Université Rouen
- Danielle Vergnes, Laboratoire LDAR Université Paris Diderot
- Yannis Ben Boujema, Professeur des écoles maître formateur
- Marie-Pierre Lubbers, Professeur des écoles, maître formateur
- Marc Sampo, Professeur des écoles

# Les programmes 2016

En mathématiques, 6 compétences se déclinent de la maternelle à l'université pour contribuer à l'acquisition des compétences du socle commun

Chercher  
Modéliser  
Représenter  
Raisonner  
Calculer  
Communiquer

## 3 domaines de connaissances qui sont imbriqués



La rubrique « organisation et gestion de données »  
est intégrée à chacun des domaines

## **l'accent est mis sur :**

- **L'articulation très forte entre nombres et grandeurs**
  - la quantité d'éléments d'une collection d'objets discrets est une grandeur, sa mesure est un nombre entier
  - les opérations sur les grandeurs contribuent à donner du sens aux opérations sur les nombres
  - une des dimensions de la résolution de problème est la modélisation de situations faisant intervenir les grandeurs.
  
- **L'étude des différentes représentations des nombres** qu'elles soient langagières ou symboliques
  - désignations écrites, orales, en unités de numération, sous formes d'écritures arithmétiques
  - représentations iconographiques, schématiques, et particulièrement la **demi droite graduée...**
  - et leurs liens

- Un point de vue sur le calcul qui est la conséquence des deux points précédents :
  - **le calcul est motivé par les situations** qu'il permet de résoudre
  - il est **nourri des équivalences** entre les différentes désignations des nombres, et les propriétés de la numération. De ce fait les techniques opératoires usuelles n'interviennent que lorsque le besoin s'en fait sentir, progressivement sur les 6 années des C2 et C3
  
- Une **nécessaire évolution** dans l'apprentissage des **connaissances spatiales et géométriques**
  - Les connaissances se construisent à partir de problèmes
  - Les activités proposées permettent de passer au cours des cycles d'un regard ordinaire porté sur les objets puis sur les dessins au regard géométrique sur les figures

# Plan de cette intervention

## 1. Problèmes et situations d'apprentissage

Qu'est-ce qu'un problème

Du problème à la situation

## 2. L'espace et la géométrie

Appuis didactiques

Construction des concepts fondamentaux

Changement de regard sur les objets

## Conclusion

# Partie 1

## Problèmes et situations d'apprentissage



# 1.1. Qu'est-ce qu'un problème?

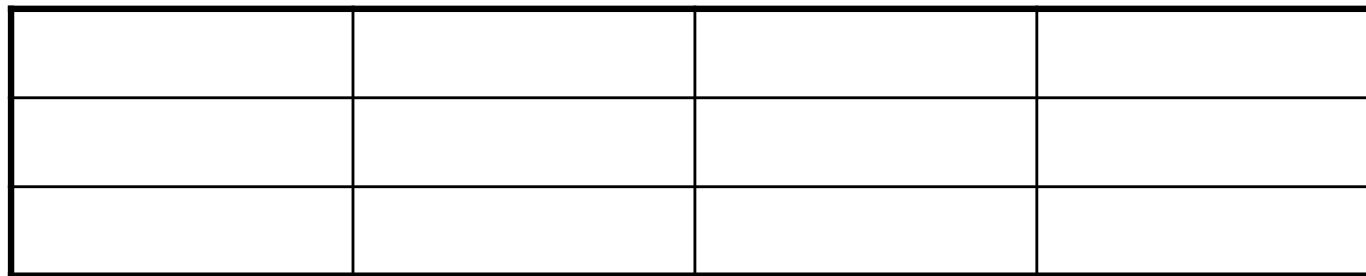
Deux exemples

Combien de rectangles dans cette figure?



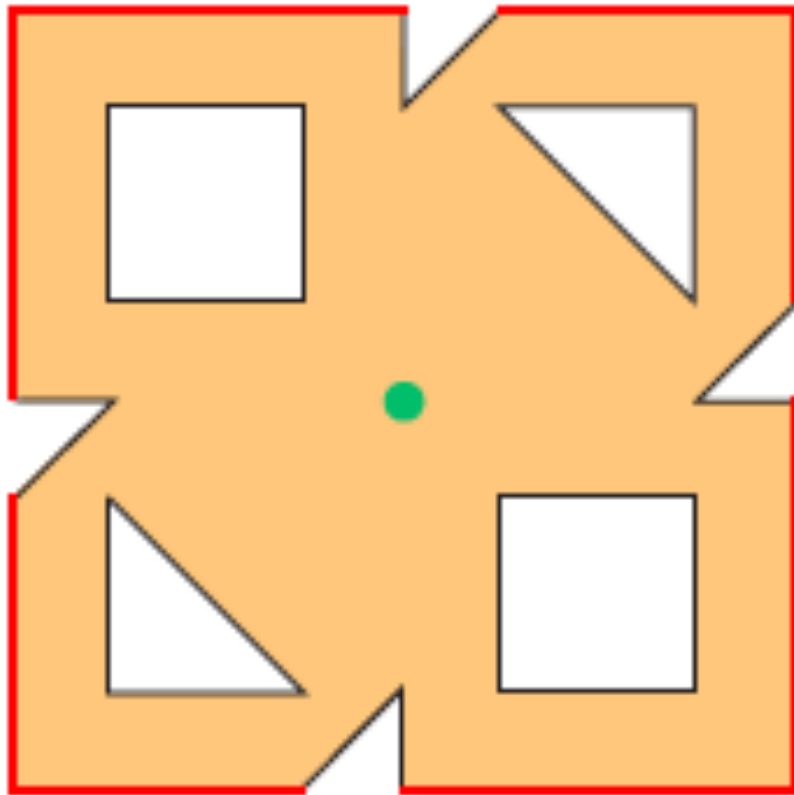
$$6+3+4+2+2+1 = 18$$

Et dans celle-ci?



$$C_5^2 \times C_4^2 = 60$$

# Reproduire un napperon par pliage, découpage



« Dans un carré de papier réaliser un « napperon » ressemblant\* à celui-ci par pliage et découpage »

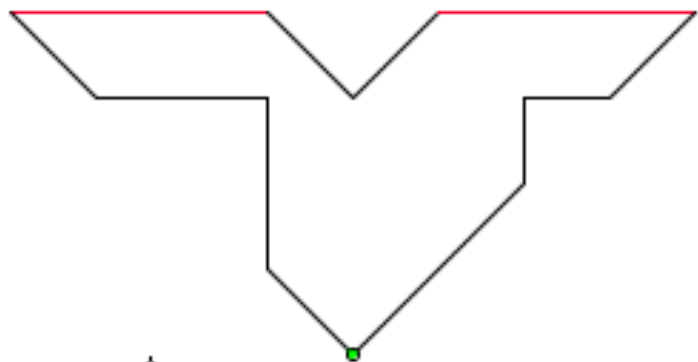
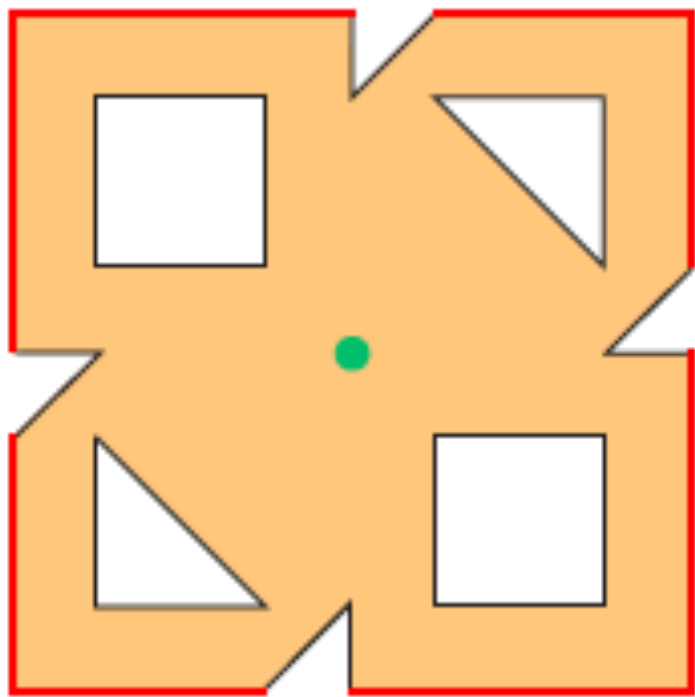
\*critères:

Même nombre de découpes

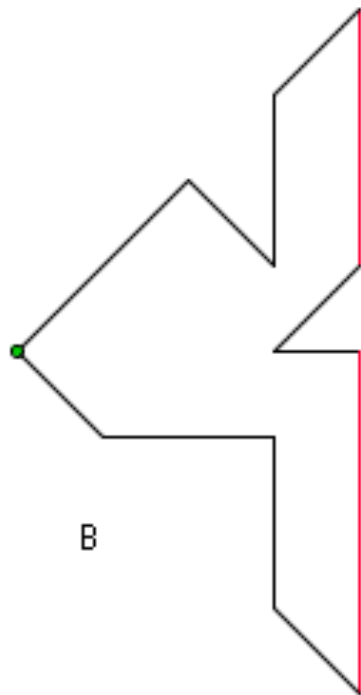
Mêmes formes

Mêmes positions relatives

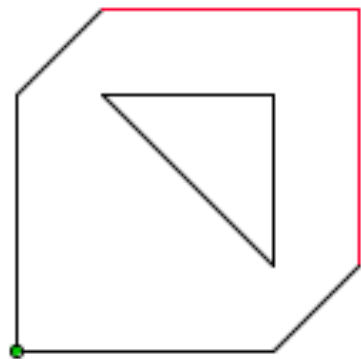
Mêmes orientations relatives



A



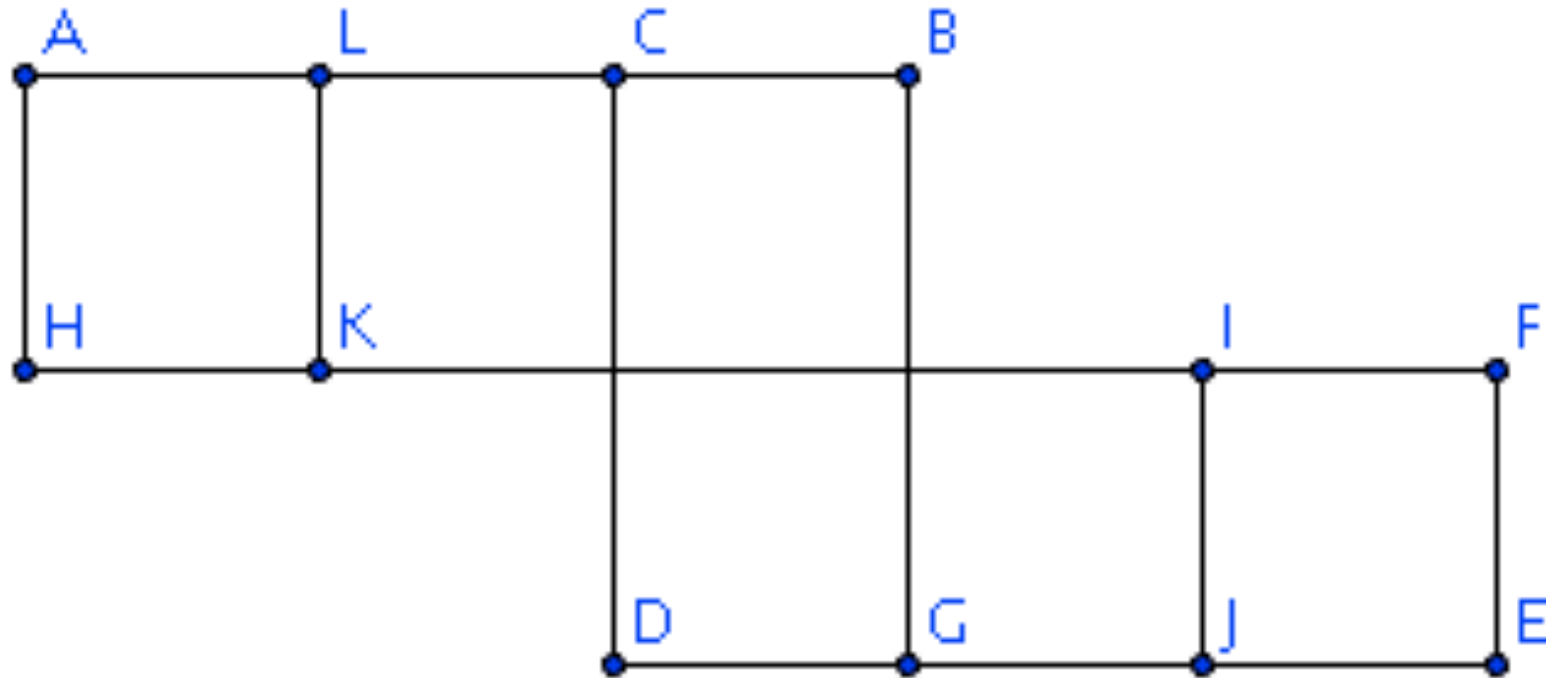
B



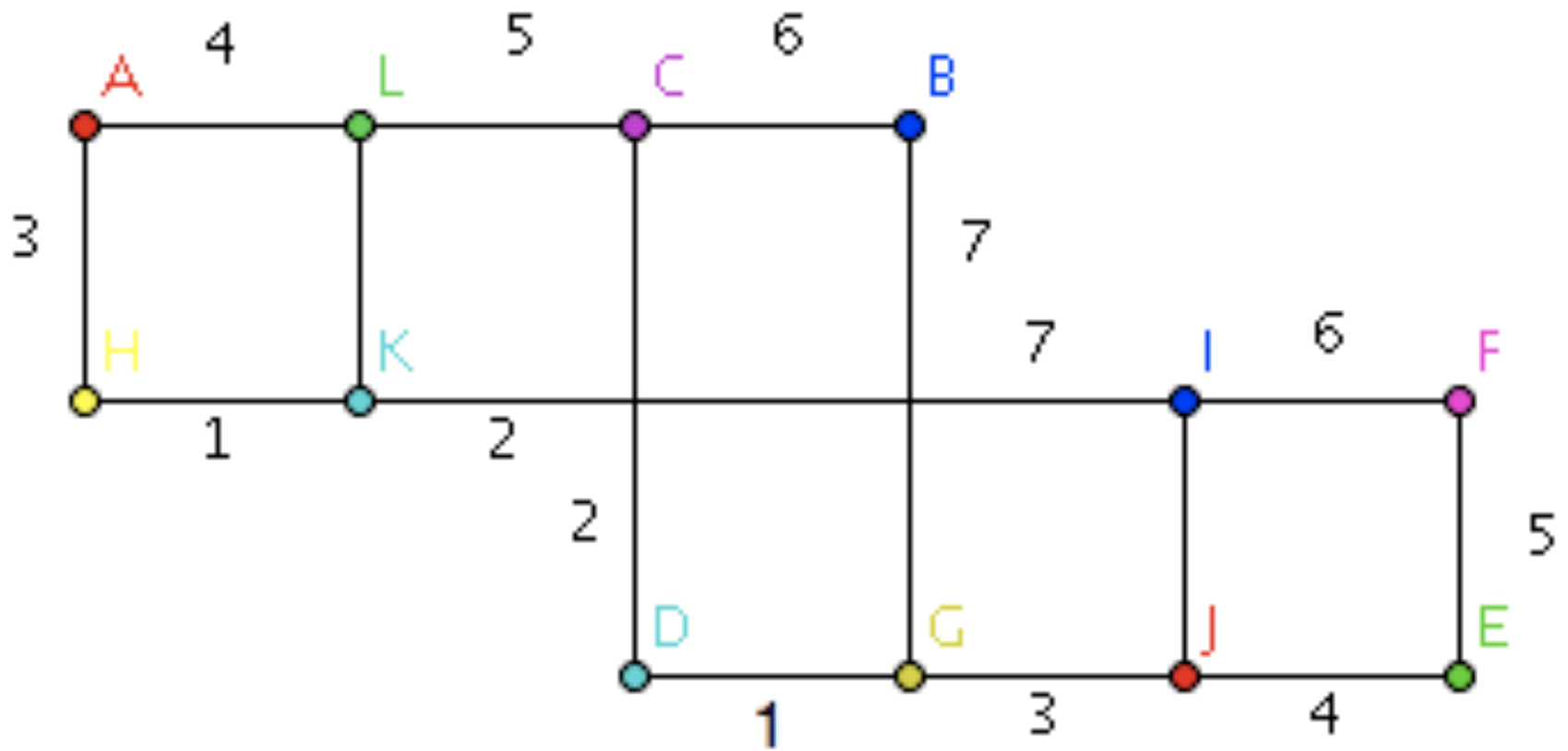
C

Voici un patron de cube

CM2



Quels segments vont coïncider au montage pour former une arête et quels points vont coïncider pour former un sommet ?



# Enfin qu'est-ce qu'un problème?

« Un problème est généralement défini comme une situation initiale, avec un but à atteindre, demandant au sujet d'élaborer une suite d'actions ou d'opérations pour atteindre ce but.

Il n'y a problème que dans un rapport sujet/situation où **la solution n'est pas disponible d'emblée**, mais possible à construire.

*C'est dire aussi qu'un problème pour un sujet donné peut ne pas être un problème pour un autre sujet, en fonction de leur niveau de développement intellectuel par exemple. »*

BRUN Jean, Math-Ecole n° 141.

## Des objectifs différents pour les problèmes

- Problèmes dont la résolution vise la **construction d'une nouvelle connaissance** ou le plus souvent **d'un nouvel aspect d'une connaissance déjà connue**
- Problèmes destinés à permettre le **réinvestissement** de connaissances déjà travaillées, ou la **mobilisation de plusieurs catégories de connaissances**
- Problèmes centrés sur le développement des **capacités à chercher**. *En général, pour résoudre ces problèmes, la solution experte n'est pas à la portée des élèves, elle n'est en aucun cas le but recherché.*

# Et faire des mathématiques...

c'est

- résoudre des problèmes,
  - anticiper le résultat d'une action,
  - prévoir un résultat
  - penser pour prendre des décisions
  - et donc
    - émettre des hypothèses,
    - faire des essais, les contrôler
    - les valider ou les invalider,
    - trouver les mots pour dire...
- s'entraîner
- apprendre et retenir



- Notre métier consiste à rendre compatible cette activité intellectuelle formatrice (faire des maths) avec l'acquisition des savoirs des programmes de l'école (apprendre des maths).

## 1.2. Du problème à la situation

3 scénarios pour une même leçon en CM2

### **Objectif commun**

Apprendre à construire un triangle connaissant la longueur de ses côtés

Cette leçon suit la leçon sur le cercle

### **Ce qui est à comparer**

- La problématisation de la question posée
- Le rôle de la manipulation
- La prise en compte des conceptions initiales
- Les rôles respectifs du professeur et des élèves

1. Le professeur montre au tableau comment on construit un triangle à l'aide de la règle et du compas, puis les élèves s'entraînent en construisant plusieurs triangles.
2. Le professeur a préparé deux triangles qu'il a découpés dans du papier cartonné, en plusieurs exemplaires. Les élèves travaillent par groupes associés 2 à 2. Chaque groupe doit rédiger un message pour que le groupe partenaire construise un triangle superposable au modèle. Après échange, les élèves construisent le triangle puis les deux groupes associés vérifient les constructions effectuées à l'aide des modèles en carton, le professeur énonce les raisons des difficultés rencontrées et relance la recherche
3. Le professeur distribue à chaque groupe une feuille sur laquelle est dessinée un triangle (2 modèles). Les élèves travaillent par groupes associés 2 à 2. Chaque groupe doit rédiger un message pour que le groupe partenaire prépare des bandelettes de papier qui seront les côtés du triangle, puis construise le triangle. La vérification se fera par superposition avec le modèle.

## scénario 2

Exemples de discussions (par messages) entre groupes d'élèves

12 cm 5 mm horizontale →  
et 15 cm 5 mm diagonal ↑  
et 15 cm 4 mm diagonal ↘ ← ça!

ça ne convient pas il n'y a pas assez  
de mesure en diagonal!

C'est une forme triangulaire.  
les deux grand côté mesure 15 cm et 4 mm.  
le plus petit côté mesure 12 cm et 5 mm.

quel est l'épaisseur de votre forme? l'épaisseur n'a rien  
à voir avec la figure

vous avez mal mesuré le petit côté. non.  
Nous trouvons que 13 cm et 1 mm donc c'est  
faux!

Non se ne se faut

La question est problématisée, elle est « consistante »

La réponse à la question est bien le savoir dont l'apprentissage est visé

Les élèves peuvent s'engager dans la recherche avec leurs connaissances antérieures

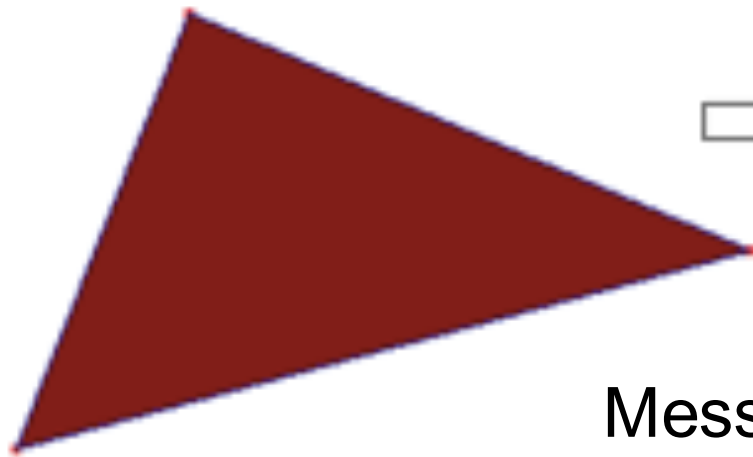
Le professeur a accès aux conceptions initiales des élèves

La validation est à la charge des élèves

La synthèse et l'institutionnalisation sont à la charge du professeur

*Remarque:*

*Des triangles « en carton » pour éviter aux élèves d'être confrontés au problème du retournement lors de la validation*



Triangle en carton



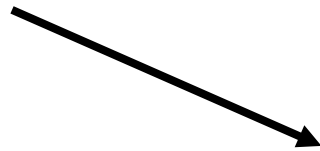
Message écrit



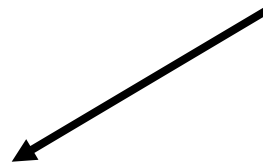
dessin

C'est ce couple problème/dispositif  
que nous appellerons situation d'apprentissage

La présence du  
matériel permet  
l'appropriation du  
problème



La nécessité de prévoir ou  
d'anticiper permet le  
développement d'une  
activité mentale et oblige  
la construction de  
procédures de résolution



Le retour à la manipulation  
permet la validation des  
prévisions

## Quelques points à surveiller

- Pour les élèves, « chercher » implique du temps, de la confiance, une forme de « sécurité »
- Pour le professeur, « **laisser les élèves chercher** » demande une posture difficile et une attention soutenue, pour certains un effort important :
  - il faut soutenir les élèves mais ne pas trop en dire,
  - il faut faire « vivre la question » sans la « tuer »,
  - il faut observer, prendre des informations,
  - il faut apporter une aide adaptée à certains,

**Et il ne faut pas ...donner la réponse !**

**... ni dire à ceux qui l'ont trouvée que c'est la bonne!**



# Des exemples de problèmes supports possibles pour construire des situations d'apprentissage dans différents domaines et à différents niveaux

**Numérique**  
**CP**

Nombre,  
quantité  
et position

**Manipulation** DE L'ORAL A L'ECRIT

Pour avancer sur la piste du jeu, tu poses un caillou sur chaque carte.



**1** Voici les cailloux de Rose :   
Sur quelle carte arrive-t-elle ?  Dessine-la. 

**2** Les cartes sont retournées.



 Entoure le dessin de la carte  |  Entoure le dessin de la carte 

Le jeton ● est en ..... position.

Le jeton ● est en ..... position.

# • Numérique

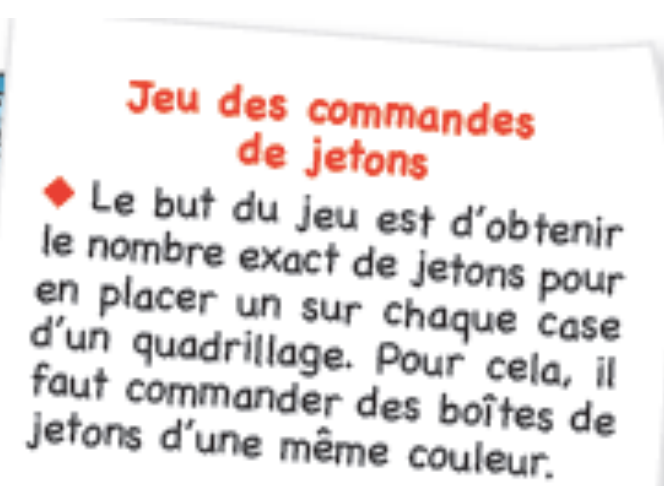
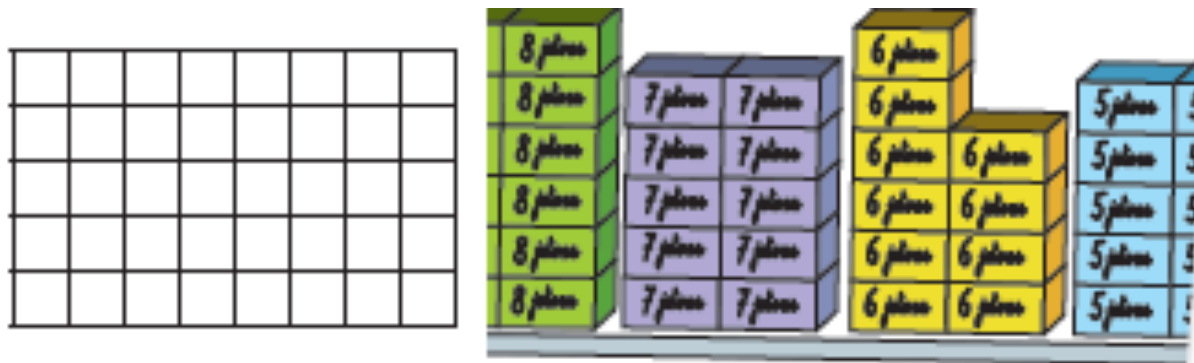
## CP



Il faut ranger 18 images dans 4 enveloppes. Les enveloppes doivent contenir 3, 4, ou 5 images. Prévois le nombre d'images à mettre dans chaque enveloppe.

décompositions additives

## CE1



Voici le quadrillage de Jeanne,  
Prépare la commande de Jeanne



## CM1

Alice veut disposer 150 œufs dans des boîtes de 12 œufs.  
Elle doit ranger le maximum d'œufs dans les boîtes qui doivent être pleines  
Prévois le nombre de boîtes nécessaires.

Introduction de la division

## CM2

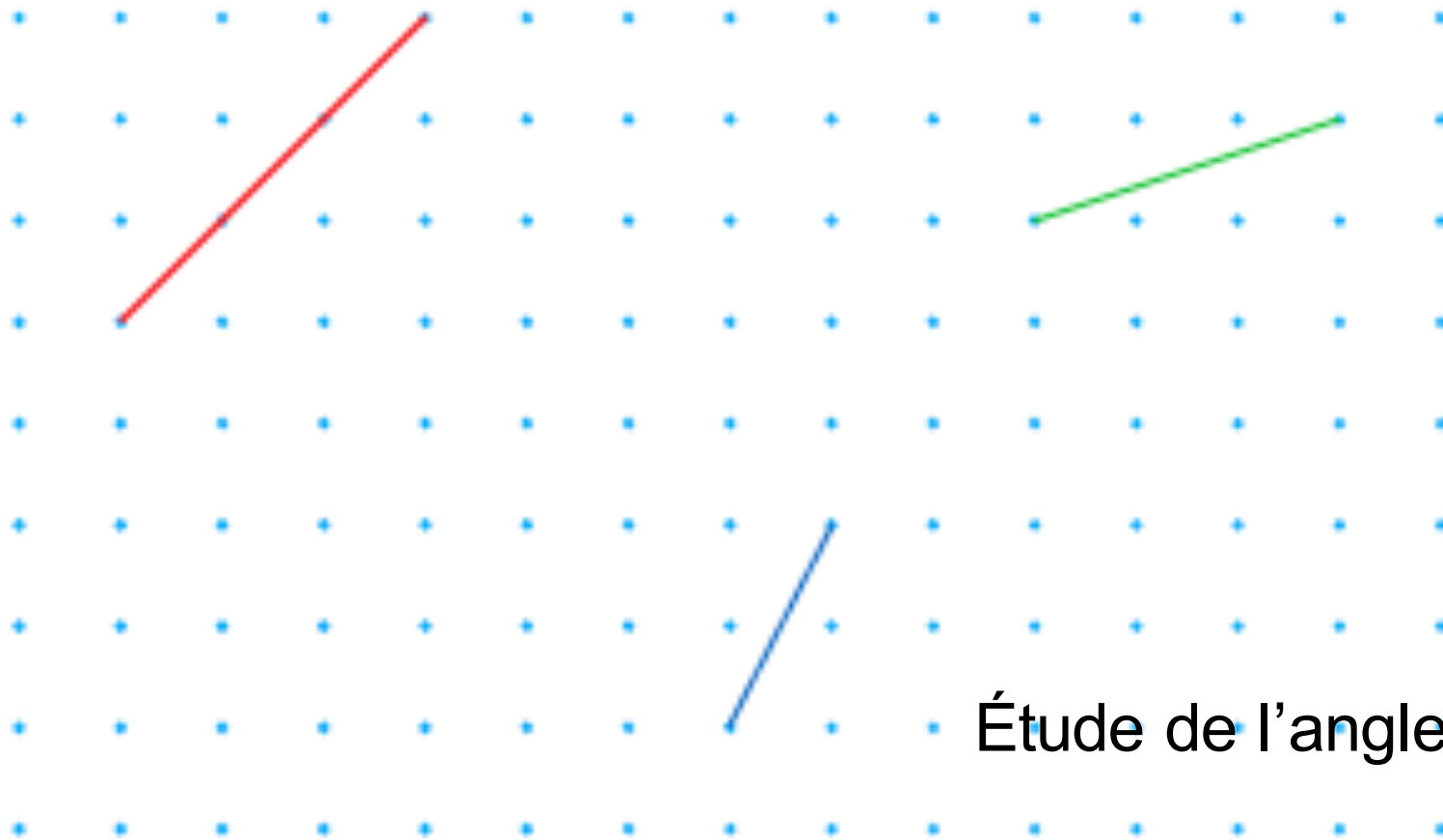
Au jeu du rétro saut,  
Zora tire le nombre 140 et doit faire des sauts 11 en reculant.  
Théo a tiré le nombre 165 et doit faire des sauts de 9 en reculant.  
Prévois par le calcul qui va arriver le plus près de zéro.

Étude du reste d'une division

- **Géométrie**

## **CE2**

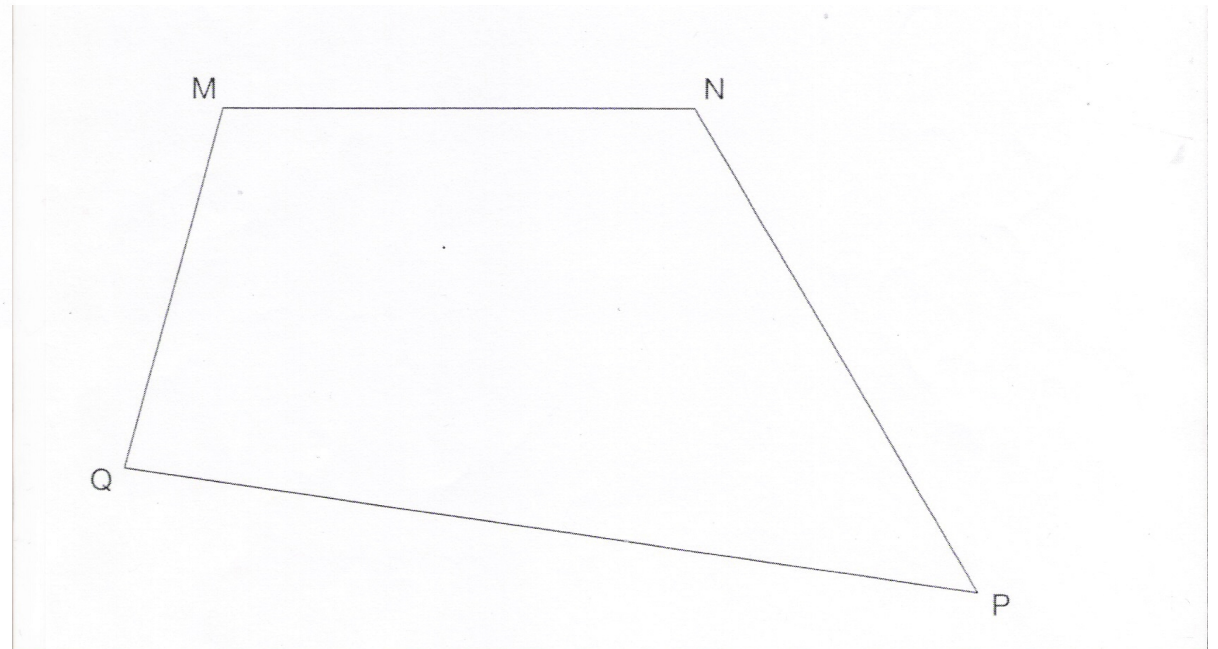
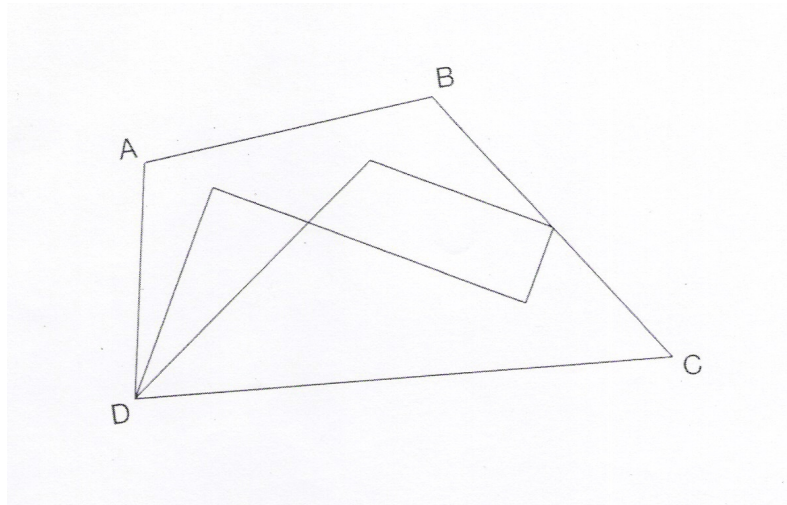
Sans utiliser ton équerre mais en utilisant les points du réseau et ta règle, tu dois construire un carré rouge, un carré bleu, un carré vert. Pour chacun d'eux un côté est déjà tracé. Trouve les sommets qui manquent, puis trace les côtés. Vérifie avec ton équerre et une bande de papier



- **Géométrie**

## CM2

Construis la figure semblable au modèle, le quadrilatère est déjà tracé

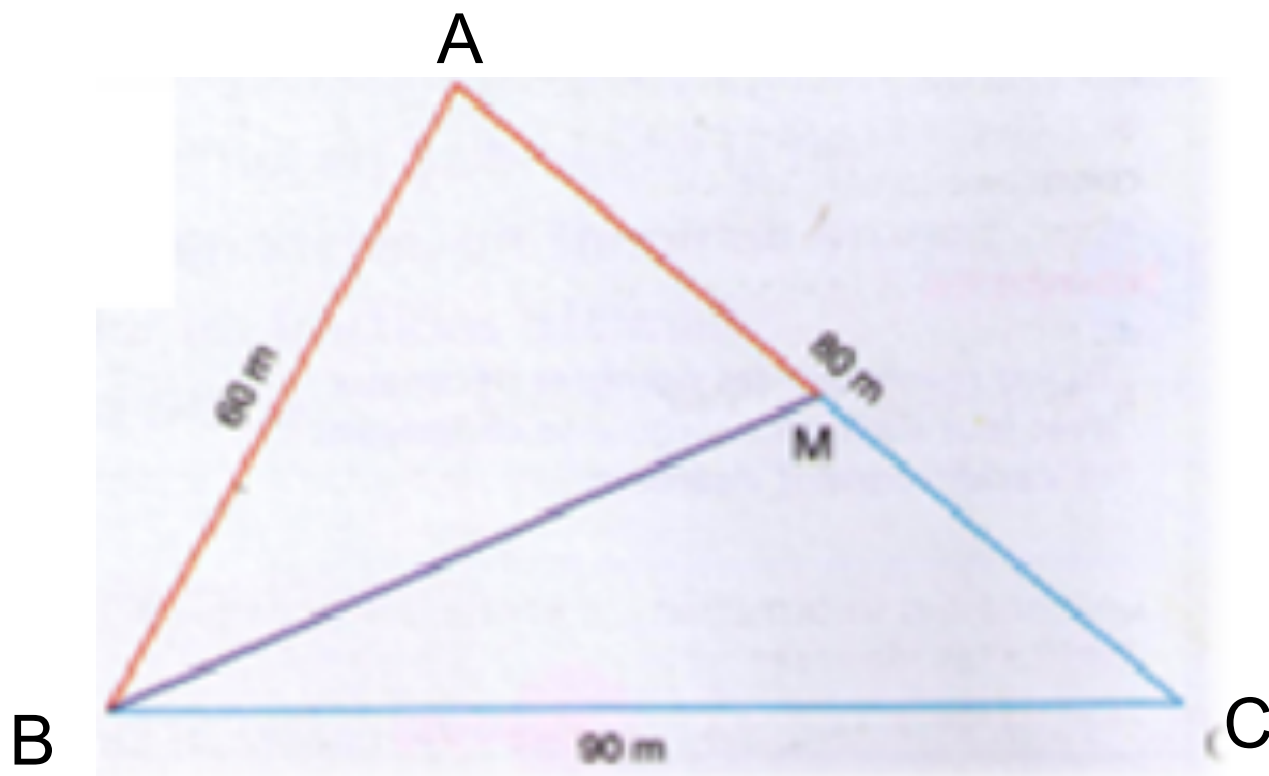


Alignement, milieu, orthogonalité, parallélisme

- **Grandeurs et mesure**

## CM2

Où placer le point M pour que les circuits ABMA et CBMC soient de même longueur?



périmètre

# Partie 2

## Espace et géométrie

### quels liens, quelles articulations?

## 2.1. Aspects didactiques

### Trois types d'espaces (G Brousseau)

La « taille de l'espace » détermine différents types d'interactions possibles entre le sujet et le milieu

- le **micro espace**, le sujet est en dehors de cet espace, il le contrôle intégralement par la vue
- le **méso espace**, espace dans lequel le sujet se trouve et se déplace, plusieurs « vues » sont souvent nécessaires pour l'appréhender
- le **macro espace** dont on ne peut avoir que des visions locales, et dont la visualisation globale ne peut être que le fait d'une construction mentale.



# Un cadre pour penser l'enseignement de la géométrie (Houdement, Kuzniak, Parsysz)

- 4 niveaux déterminés en fonction :
  - des objets
    - physiques
    - graphiques
    - théoriques
  - des modes de validation qui appartiennent à différents registres
    - la perception globale
    - la perception instrumentée
    - le raisonnement (déductif)

## Et donc... plusieurs « géométries »

	<u>géométries non axiomatiques</u>		<u>géométries axiomatiques</u>	
<u>type de géométrie</u>	<u>géométrie concrète</u> G0	<u>géométrie spatio-graphique</u> G1	<u>géométrie proto axiomatique</u> G2	<u>géométrie axiomatique</u> G3
<u>objets</u>	<u>physiques</u>	<u>physiques et graphiques (dessins)</u>	<u>théoriques (figures)</u>	<u>théoriques</u>
<u>validation</u>	<u>perception globale</u>	<u>perception instrumentée</u>	<u>raisonnement déductif</u>	<u>raisonnement déductif</u>
<u>cycle de la scolarité</u>	<u>cycle 1</u>	<u>cycle 2</u> <u>cycle 3</u>	<u>(cycle3)</u> <u>collège</u>	<u>(collège)</u> <u>lycée, université</u>

# Trois temps pour étudier des connaissances géométriques

➤ Émergence des connaissances spatiales à partir de jeux, de manipulations, de résolution de problèmes spatiaux

➤ Passage de ce qui est vécu dans le « méso-espace » ou dans le micro espace à ce qui est représenté sur la feuille de papier,

- importance du langage

- étude des pertes d'informations lors du passage de l'espace au plan

➤ Étude instrumentée des relations et des objets géométriques dans le « micro-espace »,

- mise en place du langage spécifique

- apprentissage des tracés

- apprentissage du raisonnement

# Les difficultés du passage de l'espace à ses représentations planes

Quelques exemples :

- Lire un dessin pour comprendre une position dans l'espace réel (GS/CP)

le compléter  
sous la dictée



- Lire une photographie

Voici la photo  
d'un pavé droit



- Combien de faces voit-on?

Combien de faces sont cachées?

- Combien de sommets voit-on? Mets un point bleu sur chacun d'eux.

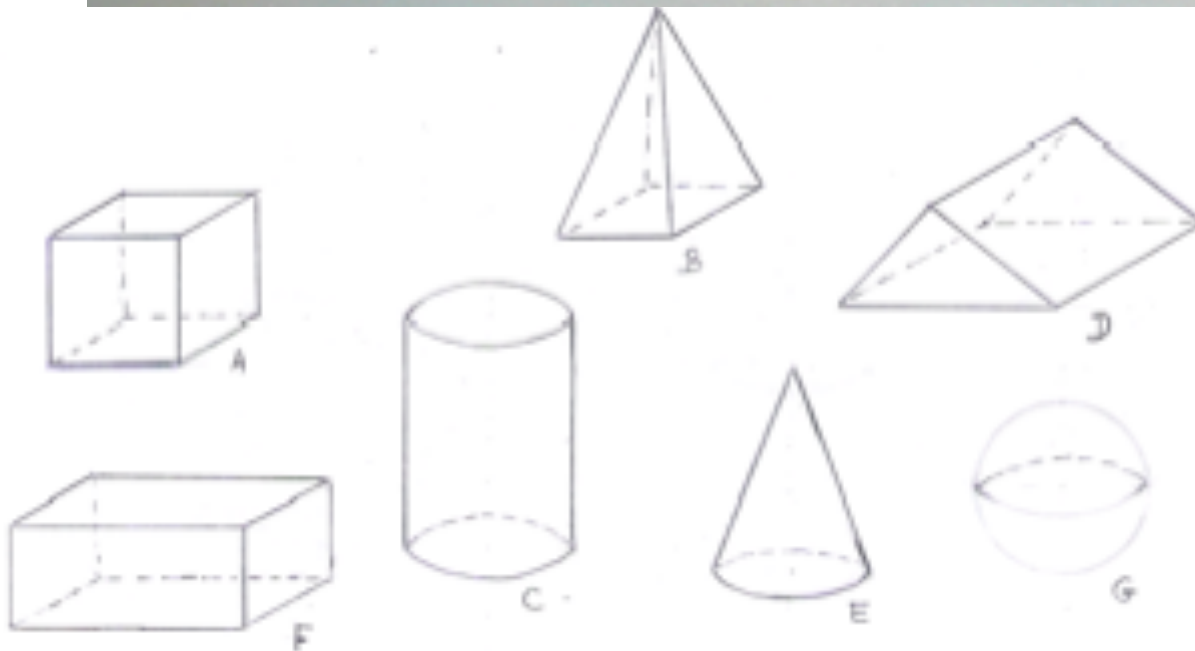
Combien de sommets sont cachés?

- Combien d'arêtes voit-on? Colorie-les de différentes couleurs.

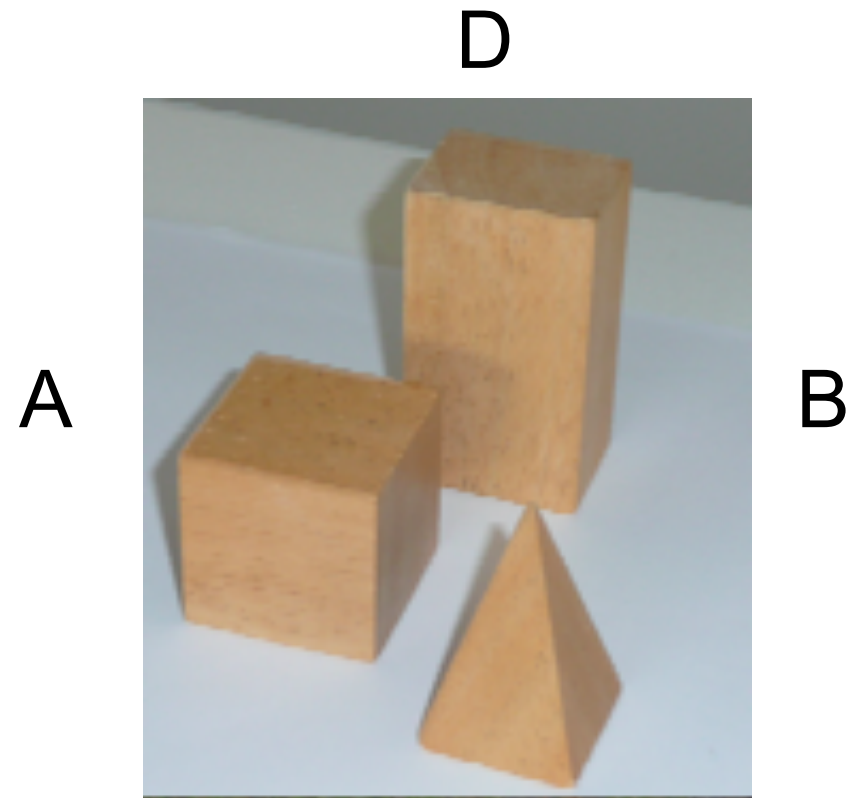
Combien d'arêtes sont cachées? (CE1)

- Lire des représentations conventionnelles

Associer chaque représentation en perspective à la photo qui lui correspond (C2 C3)



- Associer chaque vue à l'emplacement qui lui correspond



1



2



3

C



4

## 2.2. Construction des concepts fondamentaux

### Exemple : l'orthogonalité et le parallélisme

Une progression par changements successifs de points de vue

- Au début du C2

Les rapports spatiaux effectifs conduisent à la reconnaissance de directions privilégiées :

la verticale et l'horizontale

Un travail spécifique sur le passage du plan vertical au plan horizontal est indispensable

*Les photographies sont une aide*

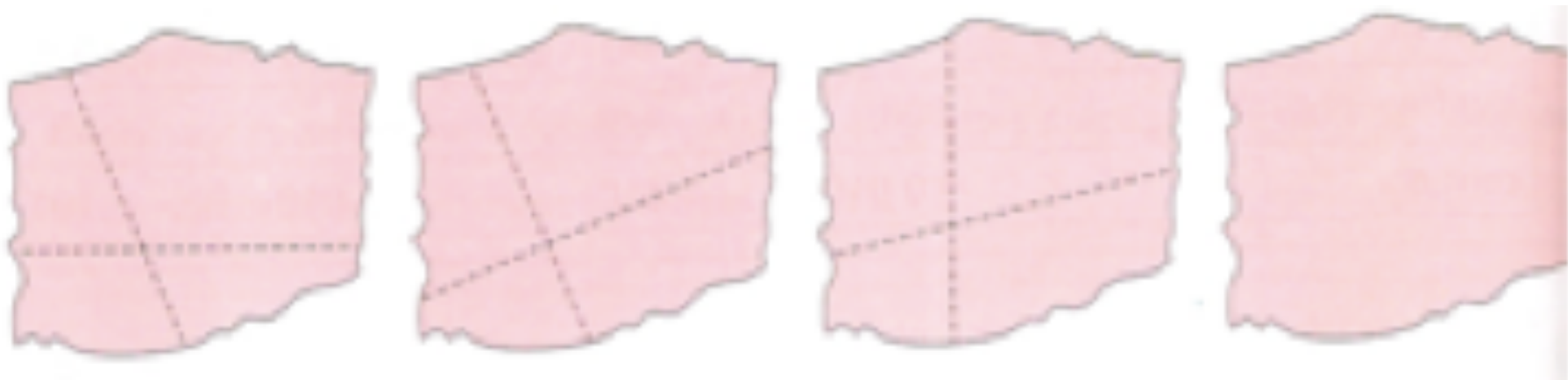
Le double pliage va permettre d'envisager l'angle droit dans diverses positions



# double pliage et angle droit



Avant de déplier, prévoir l'emplacement des plis  
Entourer une des propositions ou en faire une autre



A

B

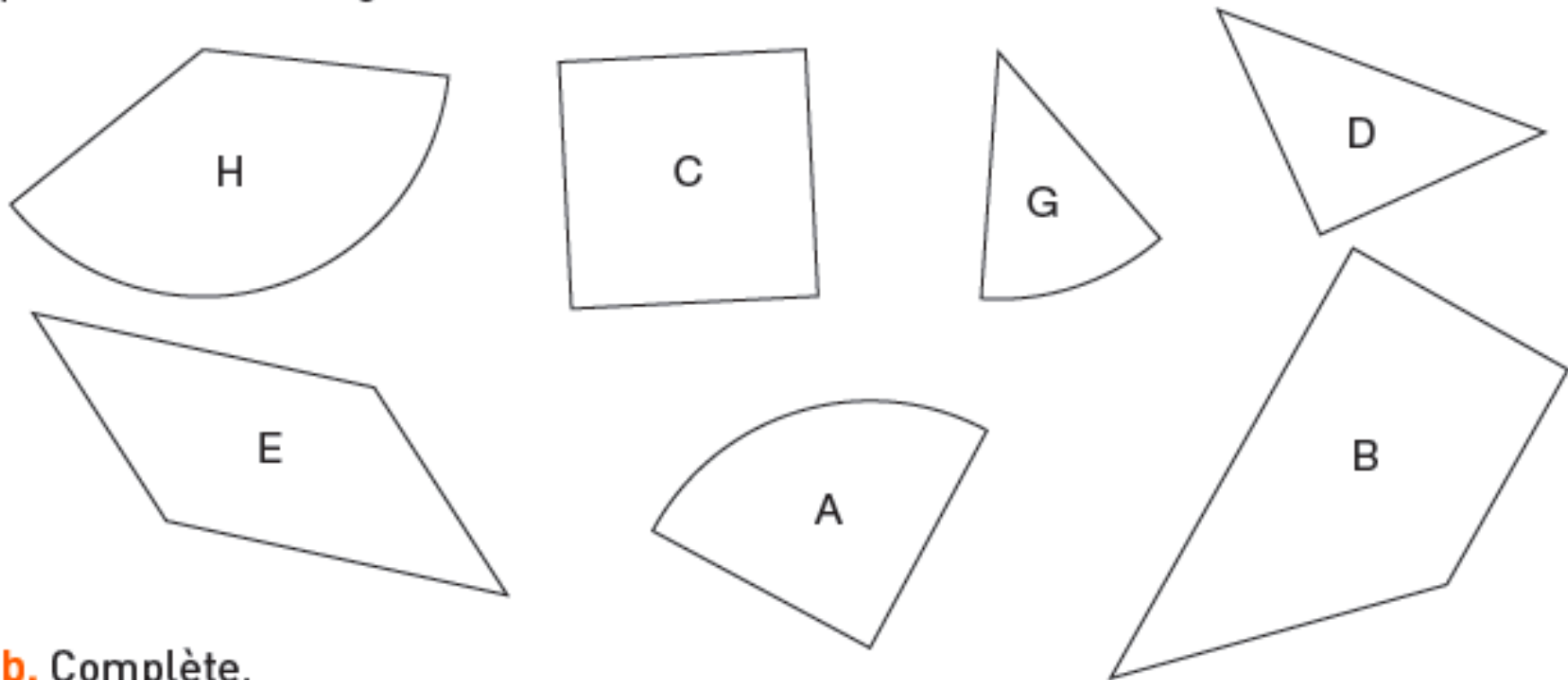
C

D

- Identifier les angles droits de figures

- Sur papier uni

a. Repère les figures qui ont un angle droit, vérifie avec ton équerre, puis colorie les angles droits en **vert**.

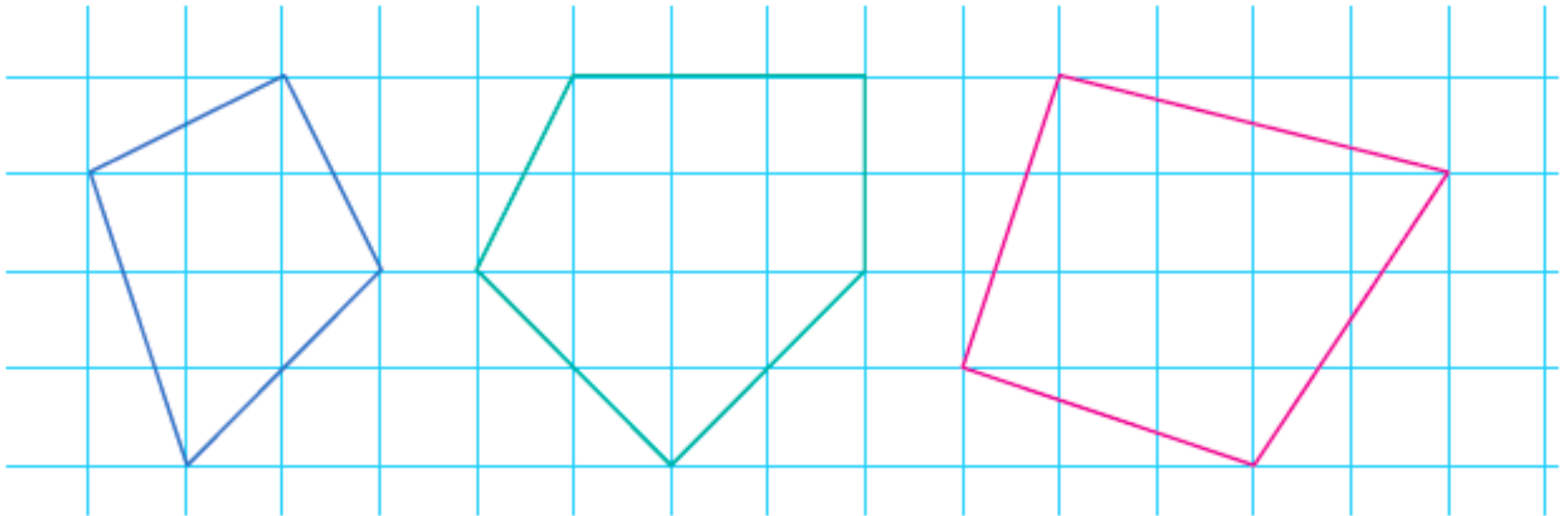


b. Complète.

lettre de la figure	A								
nombre d'angles droits	1								

## - Sur quadrillage

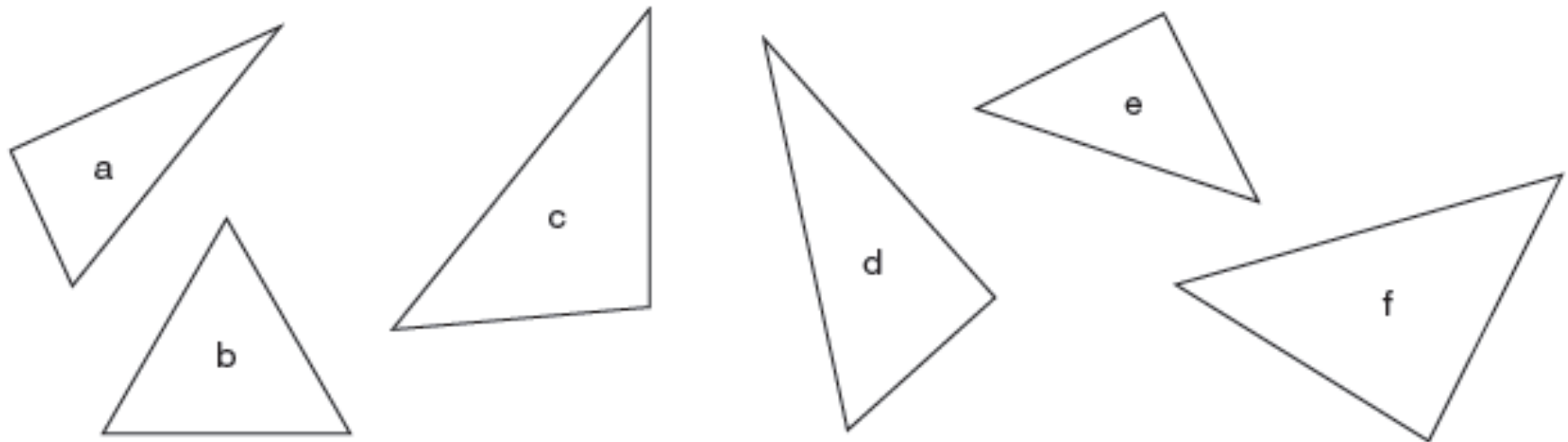
Repère les figures qui ont des angles droits, vérifie avec ton équerre, puis colorie les angles droits en **vert**.



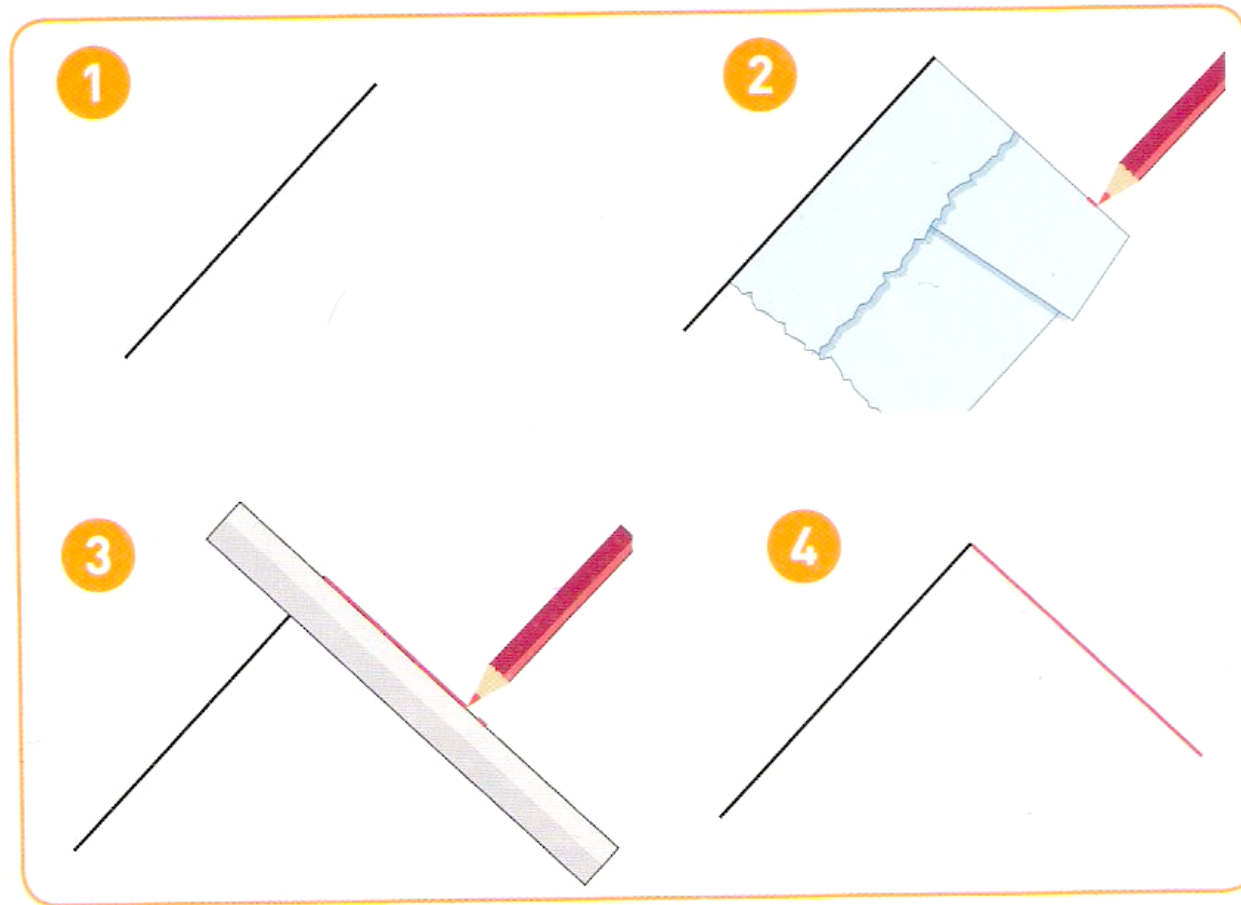
- Mais attention risque de confusion entre
  - **activité cognitive** « repérer les angles droits d'après l'image mentale que l'on en a »
  - et **activité pragmatique** « manipuler l'objet équerre et passer en revue tous les angles pour voir si on peut mettre dessus celui qui a la gomme »

*Exemple: Faire coller une gomme sur l'angle droit de l'équerre, contrôler le positionnement puis proposer l'exercice*

*« A l'aide de ton équerre, repère les angles droits et colorie-les »*



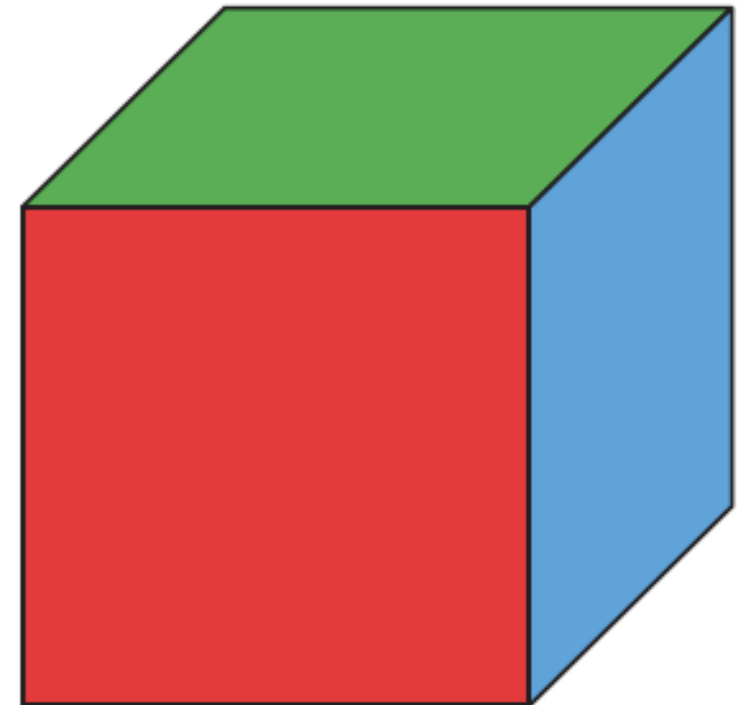
- Construire des angles droits:  
Apprentissage du geste



Au CE2 :

La notion d'angle droit, encore fragile, doit être retravaillée

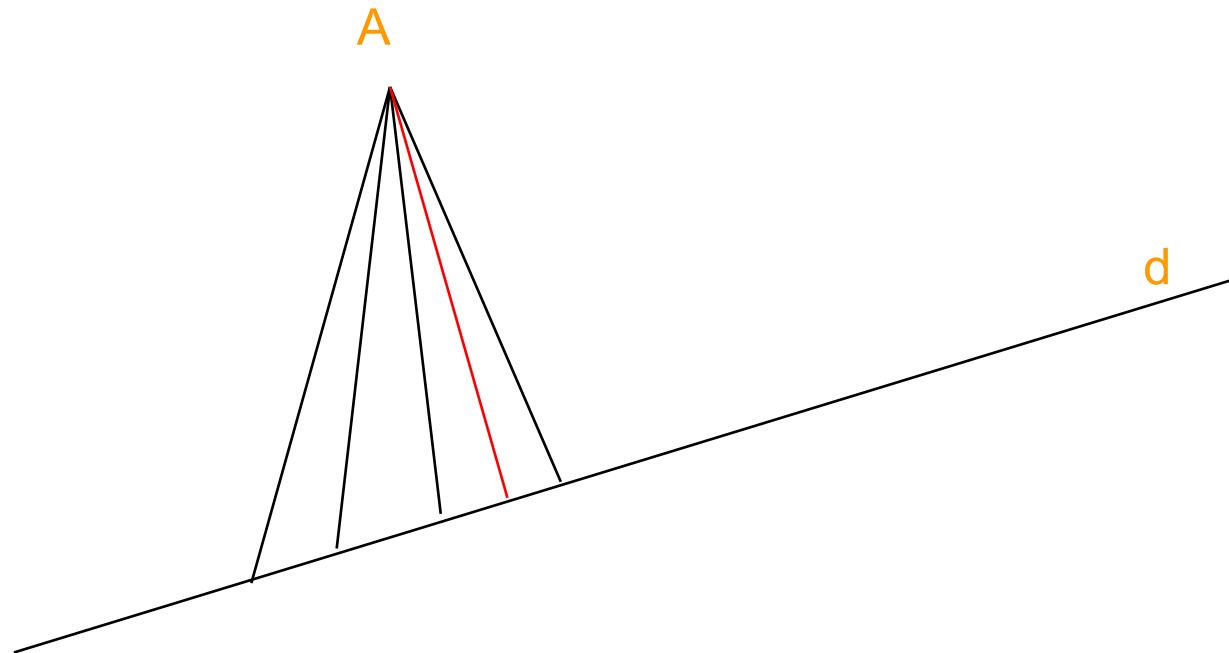
- 1 Qwang doit recouvrir exactement la face rouge de ce cube. Pour l'aider, construis un carré en reproduisant le côté déjà tracé.



Pour construire le carré, il est nécessaire de construire des angles droits qui sont alors envisagés comme outils pour résoudre le problème de construction avant d'être objets d'étude

Au CE2 et au CM : nouveau point de vue pour enrichir la notion de droites perpendiculaires et la lier aux connaissances spatiales spontanées :

Recherche de la plus courte distance d'un point A à une droite d  
La perpendiculaire issue de A à la droite est la solution experte



**aller-retour** entre les problèmes posés

- dans l'espace environnant
- dans l'espace de la feuille de papier

Premier temps

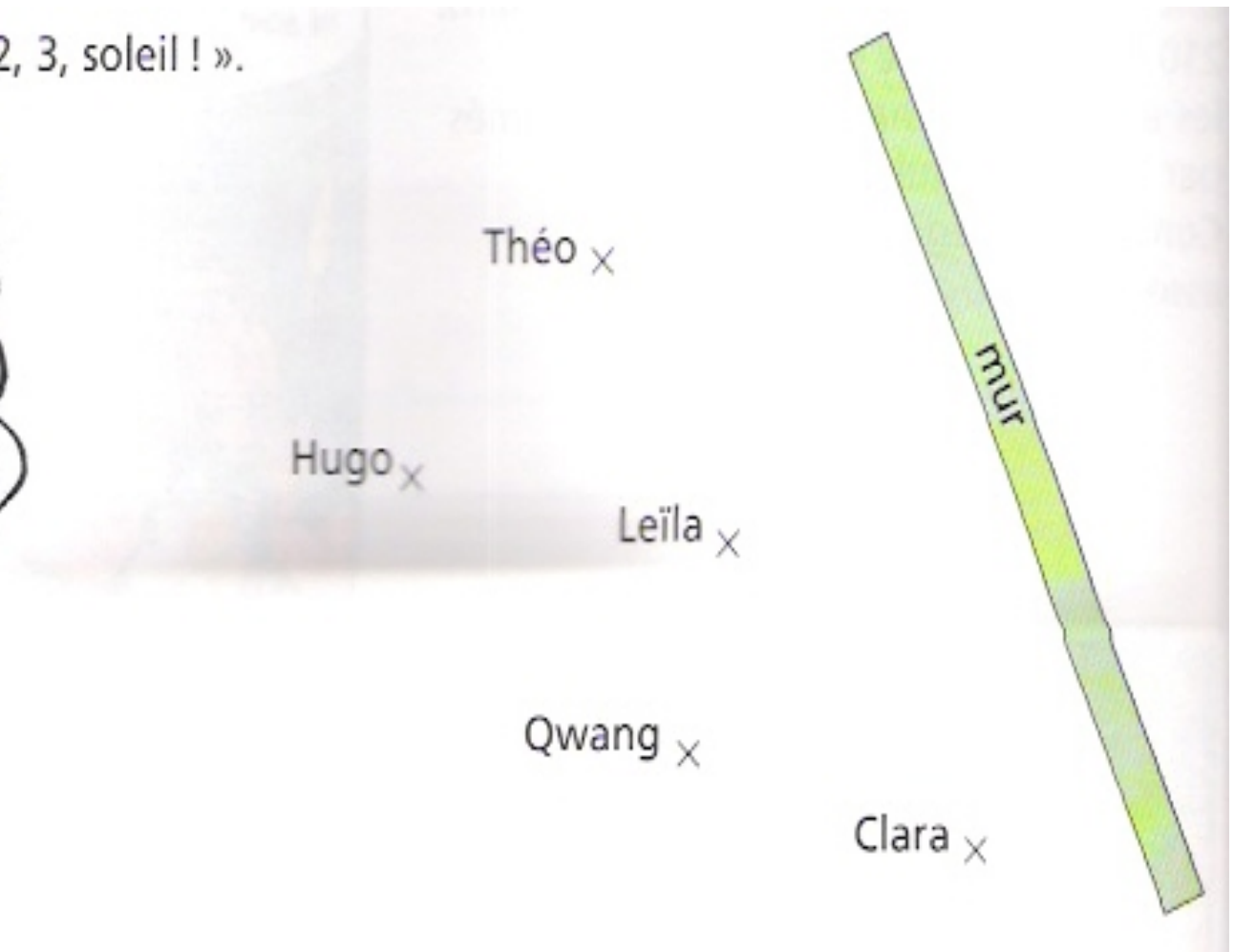
émergence des connaissances spatiales :

- jeu effectif « 1, 2, 3, soleil » dans la cour
- anticiper les trajets des joueurs et les tracer sur le sol avant de jouer



# Deuxième temps : représentation de la situation de jeu (maquette puis dessin)

Les enfants jouent à « 1, 2, 3, soleil ! ».

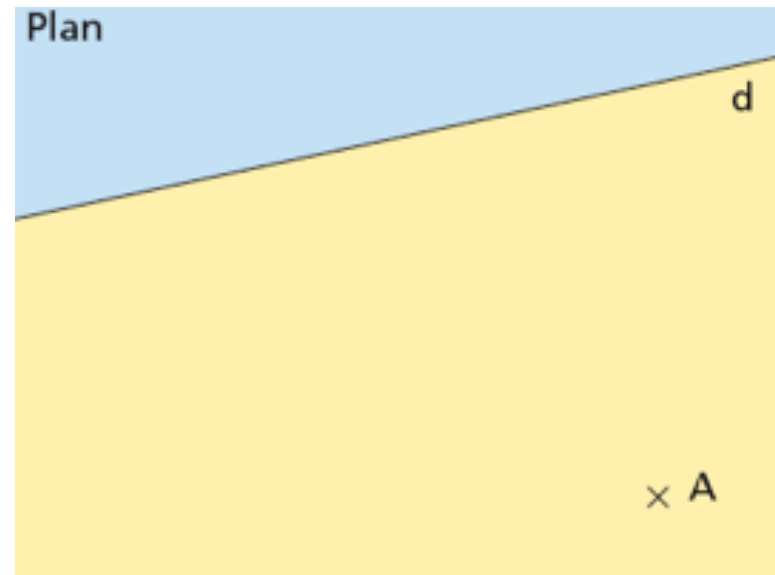


Troisième temps :

La situation spatiale est évoquée mais ce sont les tracés sur le plan qui sont objets d'apprentissage

CM

Sur le plan, la droite  $d$  représente le bord de la plage, et le point  $A$  la position de Clara.



Pour Clara, quel est le chemin le plus court pour aller au bord de l'eau. Comment est ce chemin ? Quelle est sa position par rapport à la droite  $d$  ? Trace-le avec tes instruments

# Droites parallèles

## Deux points de vue



- Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles

### Le triple pliage



6. Replie une nouvelle fois sur l'un des deux plis.

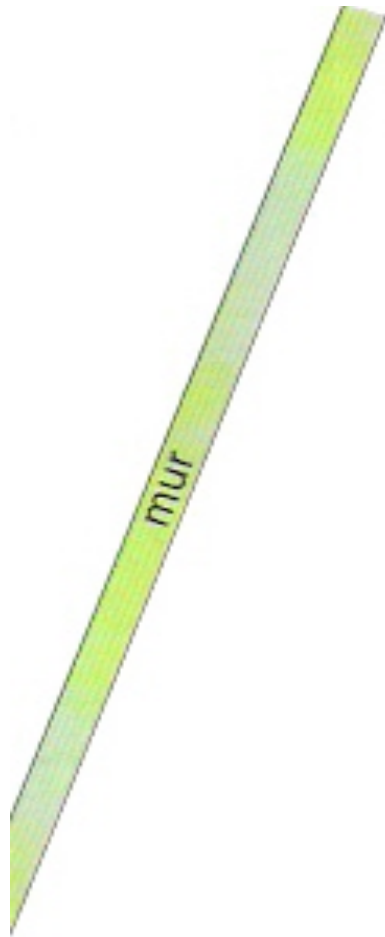


7. Réalise un nouveau pli comme sur le dessin.



8. Imagine les tracés des plis que tu obtiendras lorsque tu déplieras le papier, dessine-les ci-dessus.

- Droite parallèle à une droite : solution experte de la recherche de l'ensemble des points à même distance de cette droite



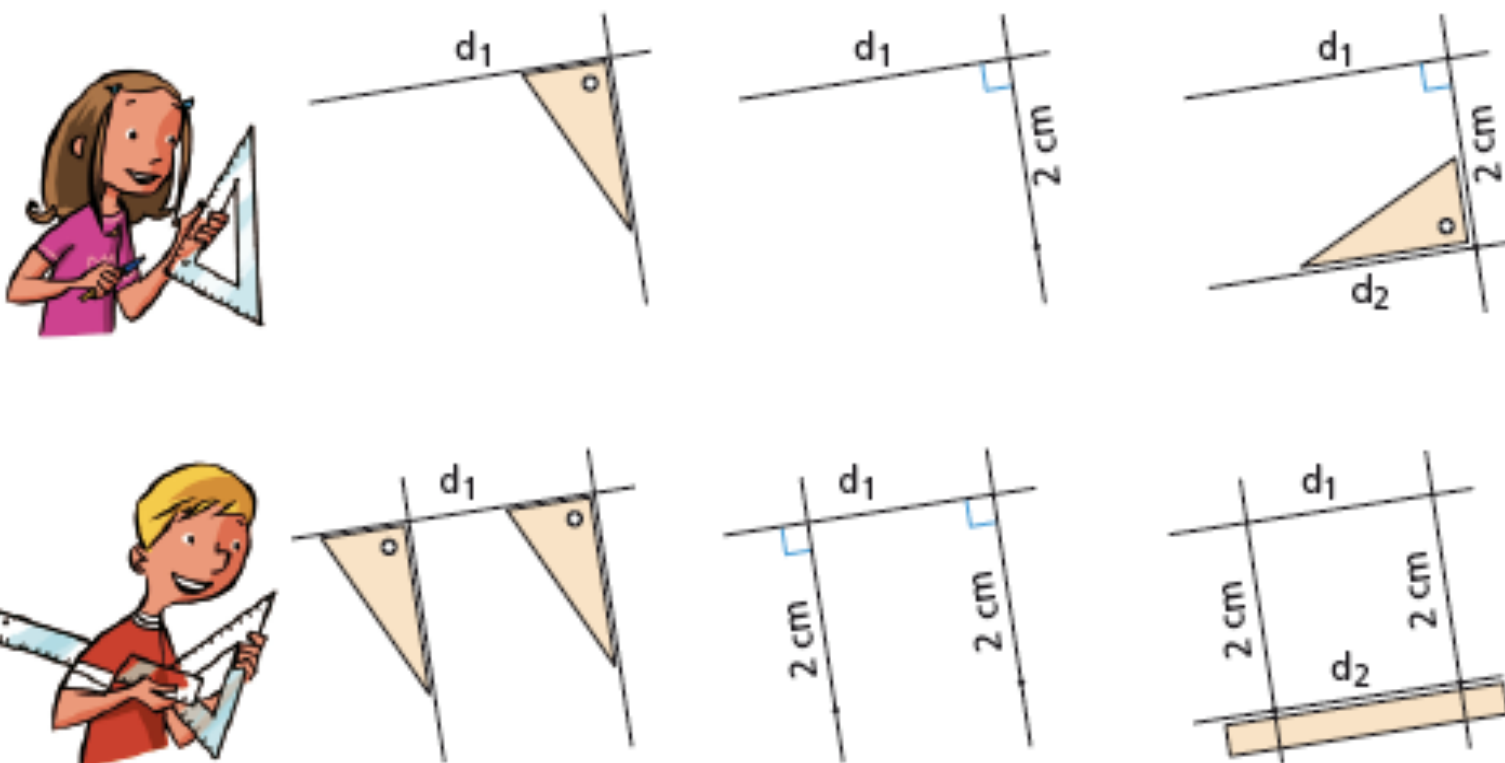
× Théo

- Préparation du jeu pour qu'il soit équitable
- Jeu effectif
- Représentation du jeu (maquette, dessin)
- Travail graphique dans le plan

# D'où deux procédés de construction

1 Trace une droite  $d$  sur une feuille unie de format A4. Place le plus rapidement possible 10 points à 15 cm de  $d$  du même côté, puis 12 autres points à 15 cm de  $d$  mais de l'autre côté. Explique comment tu as fait.

2 Voici les méthodes d'Alice et de Théo pour construire deux droites parallèles  $d_1$  et  $d_2$  distantes de 2 cm.

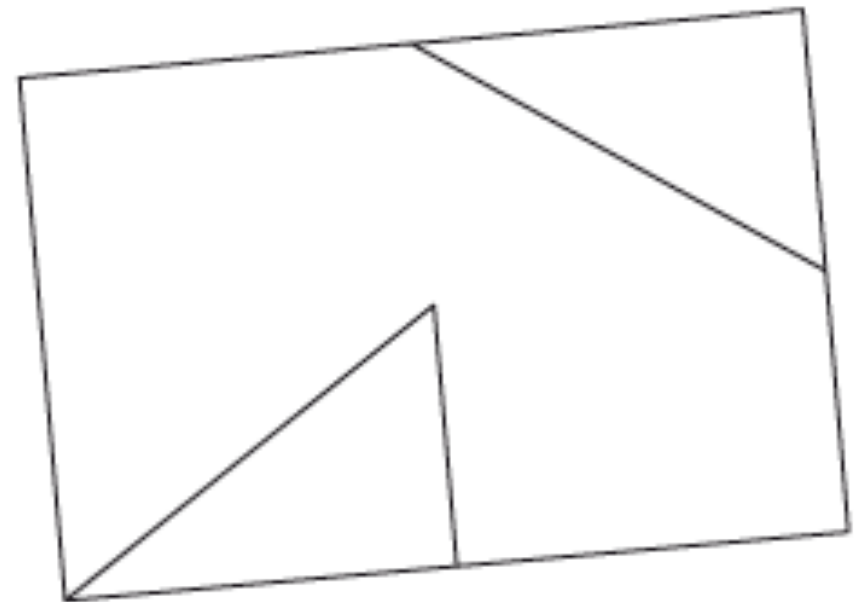
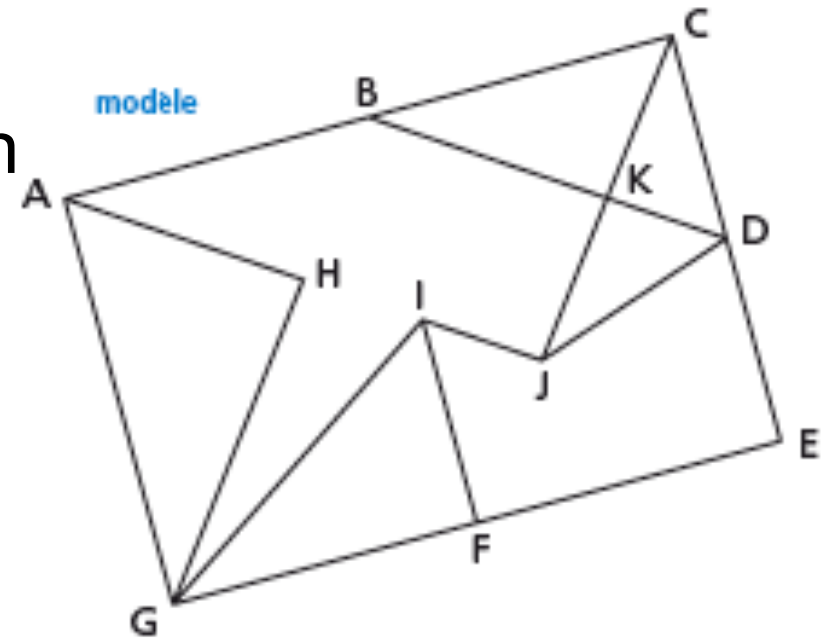


Reproduis ces constructions. Décris les différentes étapes de chaque méthode. Explique pourquoi ces deux méthodes sont correctes.

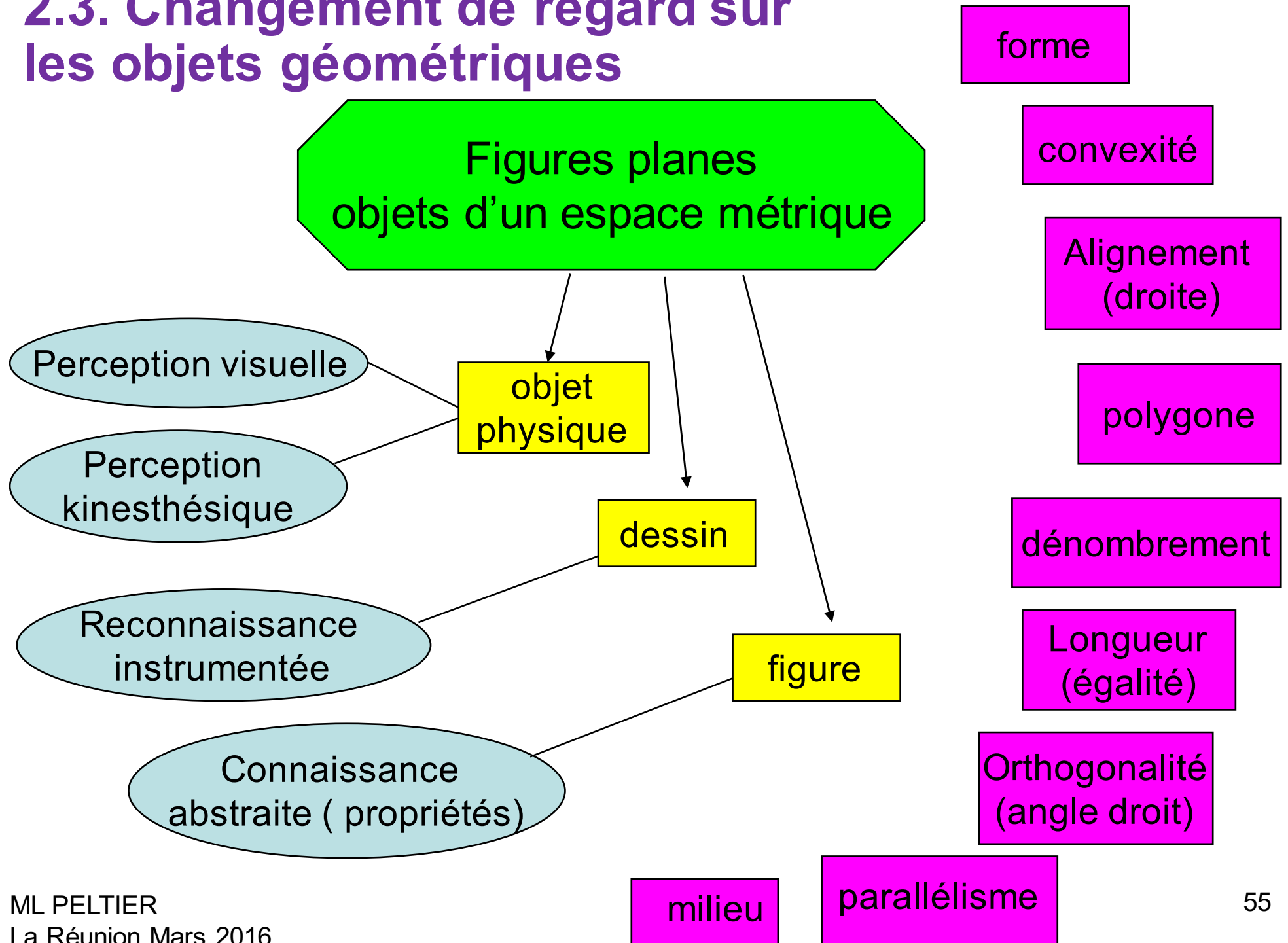
Plus tard...

Les situations de reproduction ou de restauration de figures mettent en jeu les notions à travailler :

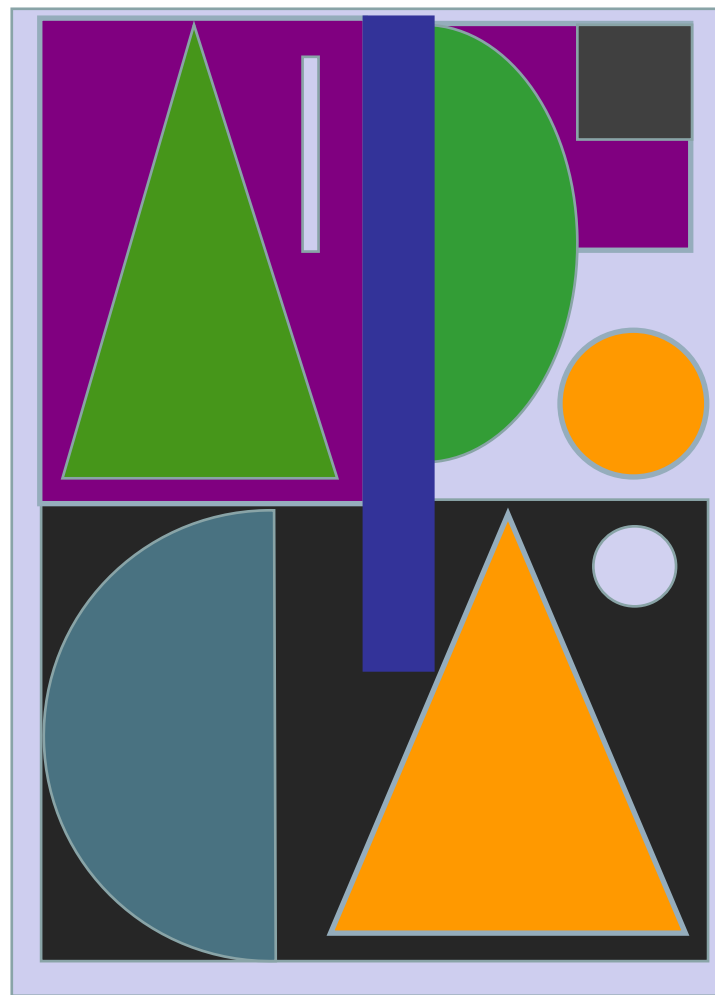
- alignement,
- milieu,
- orthogonalité,
- parallélisme



## 2.3. Changement de regard sur les objets géométriques

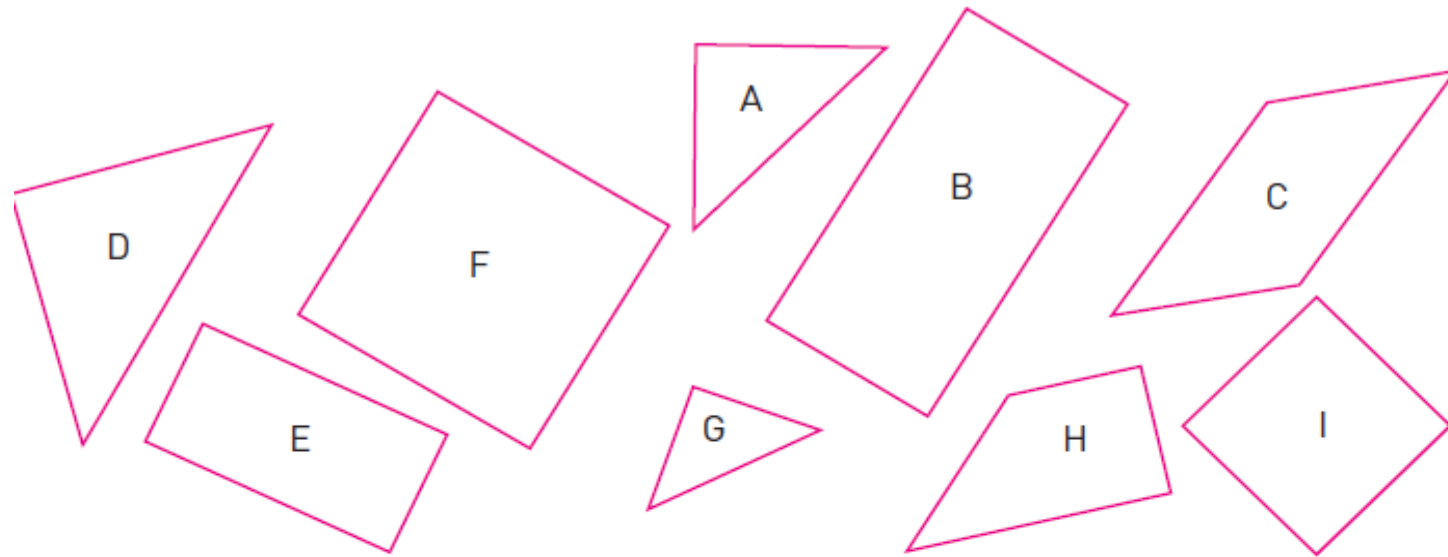


# AU C2 Des objets physiques



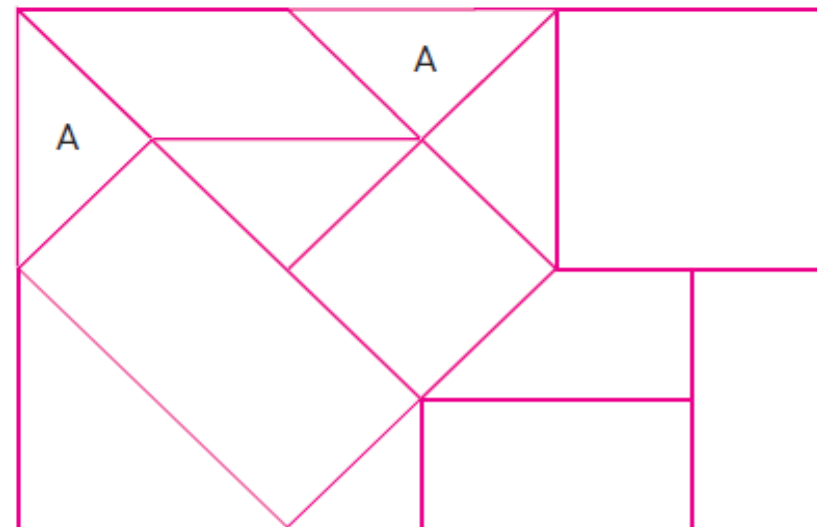


# Reconnaître et nommer les figures usuelles dans des assemblages



Continue d'**indiquer** dans le puzzle les endroits où peuvent se placer les pièces ci-dessus.  
Tu peux utiliser le calque.

Le triangle A, le rectangle E peuvent occuper plusieurs places. ►



# Etudier les effets de la juxtaposition et la superposition des pièces

## Deux visions complémentaires

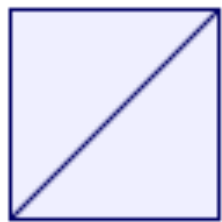
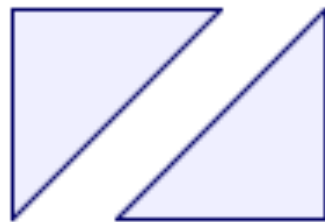


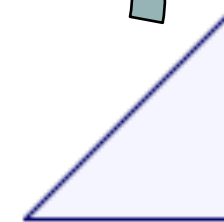
figure F



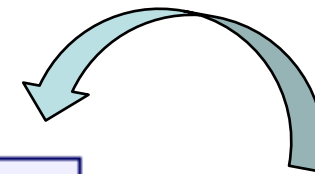
triangles T1 et T2



carré C



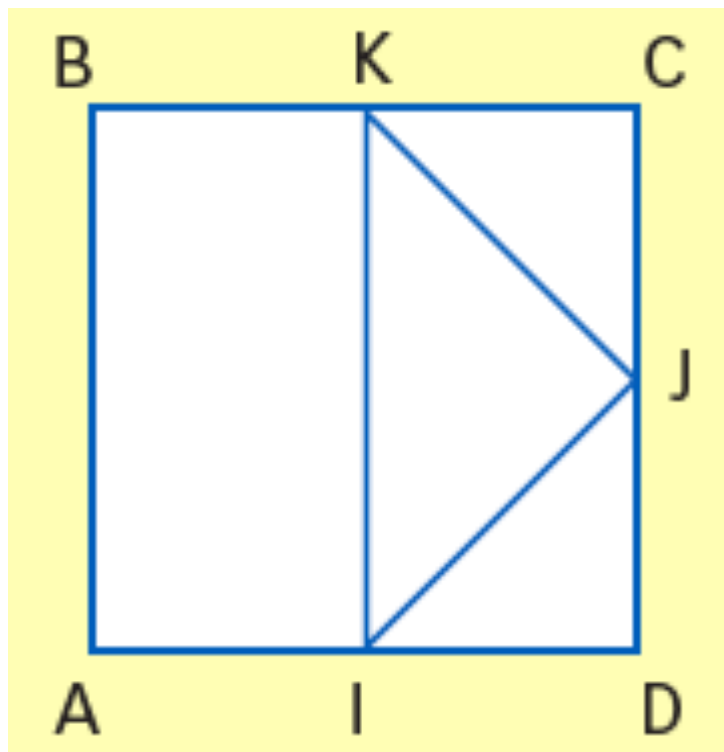
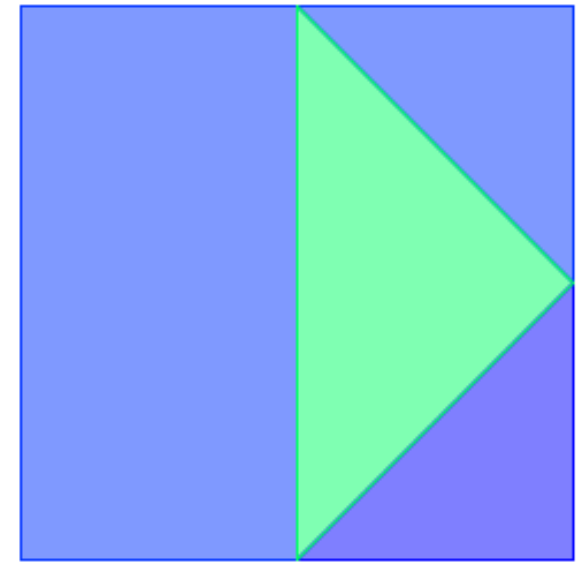
triangle T



Au C3

Des formes juxtaposées ou superposées...

... à la figure

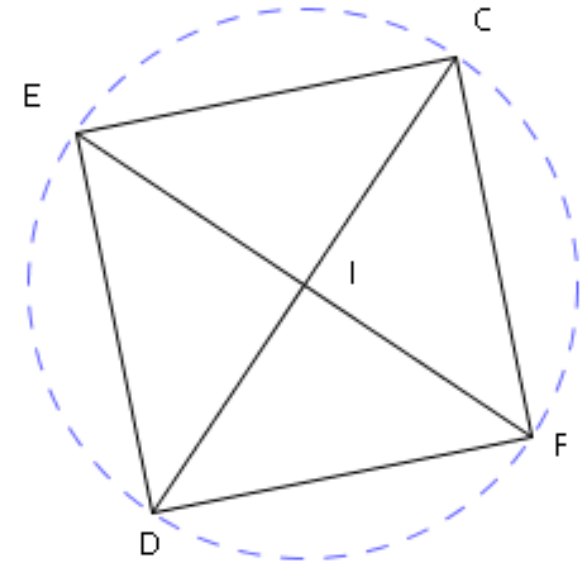


Une figure est composée de lignes et de points qui sont des intersections de lignes

Les figures ont des « propriétés » qui les caractérisent

Exemple : propriétés du carré

- Un carré est un quadrilatère
- Il a 4 côtés de même longueur
- Il a 4 angles droits



[CD] et [EF]  
sont les diagonales  
du carré  
et I est son centre.

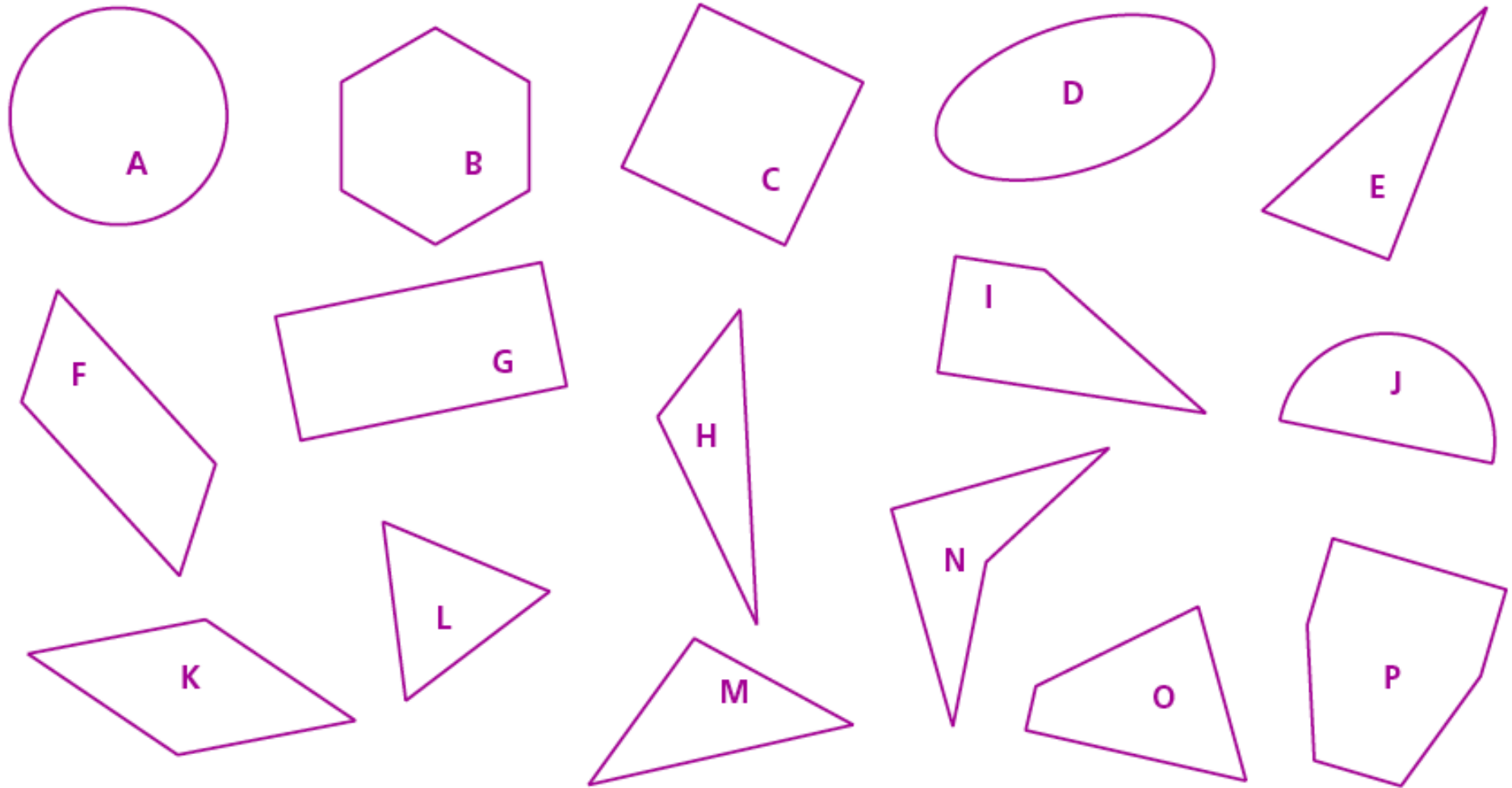


Et qui permettent de les construire

Comment construire un carré

- quand on connaît la longueur d'un côté?
- quand on connaît la longueur d'une diagonale?

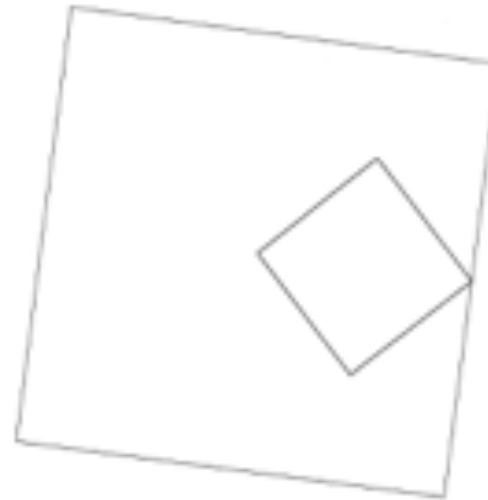
Pour travailler la notion de « propriété » d'une figure :  
classements mais aussi recherche des critères d'un  
classement réalisé



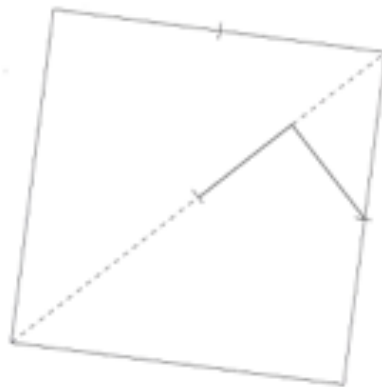
Alice a mis ensemble les polygones E, N, O car  
ils ont une propriété commune. Laquelle?

Utiliser les propriétés des figures et les relations géométriques pour construire des figures complexes

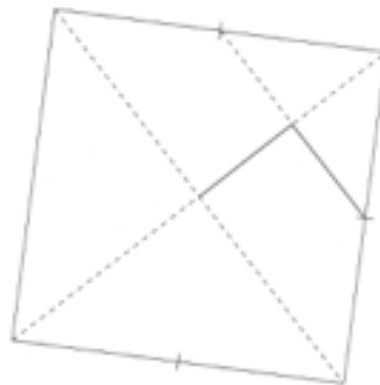
Reproduire la figure modèle en l'agrandissant dans un carré dont le côté est donné graphiquement



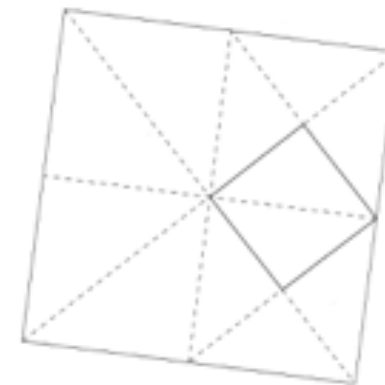
Prévoir des aides pour gérer l'hétérogénéité



aide 1



aide 2

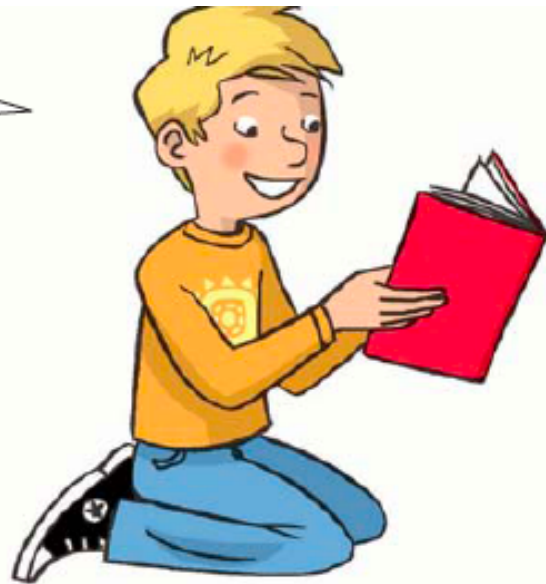


aide 3

Utiliser les propriétés pour

- Construire des figures correspondant à des dessins à main levée
- Elaborer des raisonnements sur des dessins à main levée
- Apprendre à argumenter

Un quadrilatère qui a 4 côtés de même longueur est un carré.



Je ne suis pas d'accord. J'ai dessiné un quadrilatère qui a 4 côtés de même longueur et qui n'est pas un carré.



# Conclusion



Rappelons que si notre rôle en tant qu'enseignant est de permettre aux élèves

- de développer des compétences,
- d'acquérir des connaissances,
- de s'approprier des savoirs,

il est aussi de développer leurs capacités

à penser,

à anticiper,

à raisonner

de manière à ce qu'ils puissent

- mobiliser leurs connaissances et utiliser leurs compétences dans un milieu non didactique.

- acquérir des attitudes nécessaires à tout citoyen



*Il m'a paru qu'en général, on ne devrait rien enseigner aux enfants sans leur en avoir expliqué et fait sentir les motifs. Ce principe me semble très essentiel dans l'instruction, mais je le crois surtout fort avantageux en arithmétique et en géométrie. Ainsi des éléments de ces sciences ne doivent pas seulement avoir pour but de mettre les enfants en état d'exécuter sûrement, et facilement par la suite, les calculs dont ils peuvent avoir besoin, mais doivent encore leur tenir lieu d'éléments de logique et servir à développer en eux la faculté d'analyser leurs idées, de raisonner avec justesse.*

Condorcet



*Merci  
de m'avoir écoutée!*